Mathematik für Informatiker II
Analysis

Kathrin Klamroth
Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg

Vorlesung im Sommersemester 2003

Inhaltsverzeichnis

Vorwort **iii**

8 Innere Produkte und quadratische Formen **1**
8.1 Skalarprodukt . . . 1
8.2 Orthogonalität . . . 8
8.3 Orthogonale Matrizen und Eigenwertaufgaben . . . 14

II Analysis **17**

9 Folgen und Reihen **19**
9.1 Folgen . . . 19
9.2 Konvergenz von reellen Zahlenfolgen . . . 20
9.3 Berechnung von Grenzwerten . . . 25
9.4 Reihen . . . 28

10 Stetige Funktionen **37**
10.1 Stetigkeit . . . 39
10.2 Gleichmäßige Stetigkeit und Satz vom Maximum . . . 44
10.3 Der Zwischenwertsatz . . . 47
10.4 Monotone Funktionen . . . 51

11 Differenzierbare Funktionen **57**
11.1 Differentiation . . . 57
11.2 Ableitungsregeln . . . 62
11.3 Monotonie und Extremwerte . . . 67
11.4 Mittelwertsätze . . . 69
11.5 Die Regeln von L'Hospital . . . 72
11.6 Der Satz von Taylor . . . 73
11.7 Numerische Lösung von Gleichungen . . . 78

12 Integralrechnung **85**
12.1 Stammfunktionen . . . 85
12.2 Integration rationaler Funktionen . . . 89
12.3 Das Riemann Integral . . . 93
12.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . 101
12.5 Uneigentliche Integrale . . . 105
12.6 Numerische Integration . . . 107
12.7 Anwendungen der Integralrechnung . . . 113

Vorwort

Das vorliegende Manuskript ist eine Mitschrift zur Vorlesung Mathematik für Informatiker II: Analysis vom Sommersemester 2003. Für seine perfektionierte Umsetzung in LaTeX 2_ε und die vielen schönen Bilder gebührt wie schon im letzten Semester Herrn Martin Bischoff besonderer Dank. Herrn Marcus Engel danke ich für die nach wie vor sehr gute Zusammenarbeit und für die reibungslose Organisation des Übungsbetriebs. Den Hilfskräften sei für die Durchführung der Übungen gedankt. Ganz besonders möchte ich mich wieder bei allen Studierenden, die an dieser Vorlesung teilgenommen haben, für ihr Interesse bedanken und ihnen viel Erfolg bei den anstehenden Prüfungen wünschen.

Das Material zu dieser Vorlesung basiert unter Anderem auf folgenden Büchern und Skripten:

(1) K.-H. Kiyek und F. Schwarz:
Mathematik für Informatiker 1 & 2,
Teubner, Stuttgart, 1989 und 1990

(2) G. Baron und P. Kirschenhofer:
Einführung in die Mathematik für Informatiker 1 & 2,
Springer, Wien, 1989 und 1990

(3) H. Grabmüller: Mathematik für Ingenieure II,
Universität Erlangen-Nürnberg, 2000.

(4) D. Happel: Mathematik für Informatiker II,
Technische Universität Chemnitz, 1999.

Als Nachschlagewerk bei allen Fragen zur Mathematik ist besonders zu empfehlen:

(5) I.N. Bronstein und K.A. Semendjajev:
Taschenbuch der Mathematik,
Teubner, Stuttgart oder Harri Deutsch, Frankfurt
(verschiedene Auflagen).

Erlangen, August 2003

Kathrin Klamroth

Kapitel 8

Innere Produkte und quadratische Formen

8.1 Skalarprodukt

Wiederholung: Matrixmultiplikation (Definition 5.14):
Seien $A \in M_{m,n}(K)$ und $B \in M_{n,p}(K)$ Matrizen über einem Körper K. Dann ist

$$A \cdot B = C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,p}}$$

mit $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Spezialfall:

$$\left.\begin{array}{lcl} A = \underline{a} = (a_1, \dots, a_n) & \in & M_{1,n}(K) \\ B = \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} & \in & M_{n,1}(K) \end{array}\right\} \text{Vektoren}$$

$$\Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Beispiel 8.1. $K = \mathbb{R}, n = 3, \underline{a} = (4, 0, -3), \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = 4 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 = -2.$$

Eigenschaften der entsprechenden Abblidung $(\bullet, \bullet) : K^n \times K^n \to K$ mit

$$(\underline{x}, \underline{y}) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in K^n :$$

(S1) $(\bullet,\bullet)$ ist eine *Bilinearform*, d.h.,
für $\lambda,\mu \in K$ und $\underline{x},\underline{x}_1,\underline{x}_2,\underline{y},\underline{y}_1,\underline{y}_2 \in K^n$ gilt:

(i) $(\lambda\underline{x}_1 + \mu\underline{x}_2, \underline{y}) = \lambda(\underline{x}_1,\underline{y}) + \mu(\underline{x}_2,\underline{y})$

(ii) $(\underline{x}, \lambda\underline{y}_1 + \mu\underline{y}_2) = \lambda(\underline{x},\underline{y}_1) + \mu(\underline{x},\underline{y}_2)$.

(S2) $(\bullet,\bullet)$ ist *symmetrisch*, d.h.,
für alle $\underline{x},\underline{y} \in K^n$ gilt:

$$(\underline{x},\underline{y}) = (\underline{y},\underline{x}).$$

(S3) Ist $K \subseteq \mathbb{R}$, so ist $(\bullet,\bullet)$ *positiv definit*, d.h.,
für alle $\underline{x} \in K^n$ gilt:

(i) $(\underline{x},\underline{x}) \geq 0$

(ii) $(\underline{x},\underline{x}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$.

Beweis. Nachrechnen (Übung).

Bemerkung. Für einen allgemeinen Körper ist (S3)(i) nur dann sinnvoll, wenn K vollständig geordnet ist (vgl. Definition 3.2).
(S3)(ii) ist für allgemeine Körper nicht richtig:

Beispiel 8.2.

(1) $K = \mathbb{Z}_2$ (vgl. Beispiele 2.37, 2.42), $n = 2$, $\underline{x} = \begin{pmatrix} [1] \\ [1] \end{pmatrix}$
$\Rightarrow (\underline{x},\underline{x}) = [1]\cdot[1] + [1]\cdot[1] = [1] + [1] = [0]$

(2) $K = \mathbb{C}$, $n = 2$, $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$
$\Rightarrow (\underline{x},\underline{x}) = 1\cdot 1 + i\cdot i = 1 + (-1) = 0.$

Definition 8.3. Sei V ein Vektorraum über $K \subseteq \mathbb{R}$.
Dann heißt eine positiv definite symmetrische Bilinearform $(\bullet,\bullet) : V \times V \to K$ *Skalarprodukt* (*skalares Produkt*) oder *inneres Produkt* auf V.
Ist auf V ein Skalarprodukt erklärt, so nennt man V einen *Praehilbertraum*. Ist zusätzlich $\dim(V) < \infty$, so heißt V euklidischer Vektorraum.

Bezeichnungen.

$$(\underline{x},\underline{y}),\ (\underline{x} \mid \underline{y}),\ <\underline{x},\underline{y}>,\ \underline{x}\cdot\underline{y},\ \underline{x}^T\cdot\underline{y},\ldots$$

Beispiel 8.4. $V = \mathbb{R}^n$, $(\underline{x},\underline{y}) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ ist ein Skalarprodukt, das sogenannte *Standardskalarprodukt* auf $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung. Sei $V = \mathbb{C}^n$ und definiere

$$(\bullet,\bullet) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C},$$
$$(\underline{x},\underline{y}) := \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y}_i \quad \forall \underline{x},\underline{y} \in \mathbb{C}^n.$$

Dann gilt:

(S1') $(\bullet,\bullet)$ ist *sesquilinear*, d.h.,
es gilt für alle $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, $\underline{x},\underline{x}_1,\underline{x}_2,\underline{y},\underline{y}_1,\underline{y}_2\in\mathbb{C}^n$:

(i') $(\lambda\underline{x}_1+\mu\underline{x}_2,\underline{y})=\lambda(\underline{x}_1,\underline{y})+\mu(\underline{x}_2,\underline{y})$

(ii') $(\underline{x},\lambda\underline{y}_1+\mu\underline{y}_2)=\overline{\lambda}(\underline{x},\underline{y}_1)+\overline{\mu}(\underline{x},\underline{y}_2)$.

(S2') $(\underline{x},\underline{y})=\overline{(\underline{y},\underline{x})}$

(S3') $(\bullet,\bullet)$ ist positiv definit.

Diese Eigenschaften können dazu herangezogen werden, den Begriff des Skalarproduktes auf Vektorräume über $\mathbb{C}$ zu erweitern.

Im Folgenden sei stets $K=\mathbb{R}$!

Ist $V=\mathbb{R}^n$ mit $n=1$, 2 oder 3 und $(\underline{x},\underline{y})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$, so besitzt

$$\sqrt{(\underline{x},\underline{x})}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

eine einfache geometrische Deutung als Abstand des Punktes mit Ortsvektor $\underline{x}$ vom Koordinatenursprung $\underline{0}$. Viele der für den geometrischen Abstandsbegriff charakteristischen Eigenschaften übertragen sich auf die folgende Definition:

Definition 8.5. Sei $(\bullet,\bullet)$ ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum V über $\mathbb{R}$. Dann heißt

$$\|\underline{x}\|:=\sqrt{(\underline{x},\underline{x})}$$

die von diesem Skalarprodukt induzierte *Norm* von $\underline{x}$.

Satz 8.6. Sei $\|\underline{x}\|=\sqrt{(\underline{x},\underline{x})}$ wie in Definition 8.5. Dann gilt:

(N1) $\|\underline{x}\|\geq 0\quad\forall\underline{x}\in V$ und $\|\underline{x}\|=0\ \Leftrightarrow\ \underline{x}=\underline{0}$.

(N2) $\|\lambda\underline{x}\|=|\lambda|\cdot\|\underline{x}\|\quad\forall\lambda\in\mathbb{R},\underline{x}\in V$
(dabei ist $|\lambda|$ der gewöhnliche Absolutbetrag in $\mathbb{R}$).

(N2) $\|\underline{x}+\underline{y}\|\leq\|\underline{x}\|+\|\underline{y}\|\quad\forall\underline{x},\underline{y}\in V$ (*Dreiecksungleichung*).

Beweis. (N1) und (N2) folgen unmittelbar aus den Eigenschaften (S3) und (S1) des zugehörigen Skalarproduktes. (N3) ergibt sich aus der folgenden *Schwarzschen Ungleichung*:

Satz 8.7. *Ungleichung von Cauchy-Schwarz.*
Unter den Voraussetzungen von Satz 8.6 gilt:

$$|(\underline{x},\underline{y})|\leq\|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|\quad\forall\underline{x},\underline{y}\in V.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \underbrace{(\underline{y},\underline{y})}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\left(\underline{x} - \frac{(\underline{x},\underline{y})}{(\underline{y},\underline{y})} \cdot \underline{y}, \underline{x} - \frac{(\underline{x},\underline{y})}{(\underline{y},\underline{y})} \cdot \underline{y}\right)}_{\geq 0} \\ &= (\underline{y},\underline{y}) \cdot \left[(\underline{x},\underline{x}) - 2 \cdot \tfrac{(\underline{x},\underline{y})}{(\underline{y},\underline{y})} \cdot (\underline{x},\underline{y}) + \left[\tfrac{(\underline{x},\underline{y})}{(\underline{y},\underline{y})}\right]^2 \cdot (\underline{y},\underline{y})\right] \\ &= (\underline{y},\underline{y}) \cdot \left[(\underline{x},\underline{x}) - \tfrac{(\underline{x},\underline{y})^2}{(\underline{y},\underline{y})}\right] \\ &= (\underline{y},\underline{y}) \cdot (\underline{x},\underline{x}) - (\underline{x},\underline{y})^2 \end{aligned}$$

Folgerung:

$$\begin{aligned} \left\|\underline{y}\right\|^2 \cdot \left\|\underline{x}\right\|^2 &\geq (\underline{x},\underline{y})^2 \\ \Rightarrow \quad \left\|\underline{y}\right\| \cdot \left\|\underline{x}\right\| &\geq \left|(\underline{x},\underline{y})\right|. \end{aligned}$$

□

Fortsetzung des Beweises von Satz 8.6:
(N3):

$$\begin{aligned} \left\|\underline{x}+\underline{y}\right\|^2 &= (\underline{x}+\underline{y},\underline{x}+\underline{y}) \\ &= \underbrace{(\underline{x},\underline{x})}_{=\|\underline{x}\|^2} + 2(\underline{x},\underline{y}) + \underbrace{(\underline{y},\underline{y})}_{=\|\underline{y}\|^2} \\ &\overset{\text{Satz } 8.7}{\leq} \left\|\underline{x}\right\|^2 + 2\left\|\underline{x}\right\| \cdot \left\|\underline{y}\right\| + \left\|\underline{y}\right\|^2 \\ &= (\left\|\underline{x}\right\| + \left\|\underline{y}\right\|)^2 \\ \Rightarrow \left\|\underline{x}+\underline{y}\right\| &\leq \left\|\underline{x}\right\| + \left\|\underline{y}\right\|. \end{aligned}$$

□

Satz 8.8. *Paralellogrammgleichung.*
Unter den Voraussetzungen von Satz 8.6 gilt:

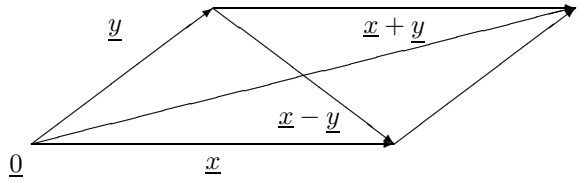
$$\left\|\underline{x}+\underline{y}\right\|^2 + \left\|\underline{x}-\underline{y}\right\|^2 = 2\left(\left\|\underline{x}\right\|^2 + \left\|\underline{y}\right\|^2\right).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} &(\underline{x}+\underline{y},\underline{x}+\underline{y}) + (\underline{x}-\underline{y},\underline{x}-\underline{y}) \\ &= \left[(\underline{x},\underline{x}) + 2(\underline{x},\underline{y}) + (\underline{y},\underline{y})\right] + \left[(\underline{x},\underline{x}) - 2(\underline{x},\underline{y}) + (\underline{y},\underline{y})\right] \\ &= 2(\underline{x},\underline{x}) + 2(\underline{y},\underline{y}). \end{aligned}$$

□

Anschauung: $V = \mathbb{R}^2$, $\left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$



Ausgehend von Satz 8.6 definieren wir im Folgenden den Begriff der Norm allgemeiner:

Definition 8.9. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.
Dann heißt eine Abbildung $\|\bullet\| : V \to \mathbb{R}$, die die Eigenschaften (N1), (N2) und (N3) besitzt, eine *Norm* auf V.

Bemerkung. Jedes Skalarprodukt auf V induziert also eine spezielle Norm auf V. Allerdings wird nicht jede Norm auf diese Art erzeugt, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 8.10.

(1) Sei $V = \mathbb{R}^2$, $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_1 := |x_1| + |x_2| \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^2$.
Dann ist $\|\bullet\|_1$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$,
die sogenannte *Manhattan-* oder *Rechtecknorm*.

(2) Sei $V = \mathbb{R}^2$, $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty := \max\{|x_1| + |x_2|\} \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^2$.
$\|\bullet\|_\infty$ ist ebenfalls eine Norm auf $\mathbb{R}^2$,
die sogenannte *Maximum–* oder *Tchebychefnorm*.

Beide Normen können nicht durch ein Skalarprodukt erzeugt sein, da z.B. für $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\underline{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Paralellogrammgleichung aus Satz 8.8 nicht erfüllt ist:

(1) $$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_1^2 + \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_1^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$
$$\neq 2 \cdot \left(\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_1^2 + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_1^2 \right) = 2 \cdot (1+1) = 4.$$

(2) $$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_\infty^2 + \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_\infty^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$
$$\neq 2 \cdot \left(\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty^2 + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_\infty^2 \right) = 2 \cdot (1+1) = 4.$$

Basierend auf dem Begriff der Norm eines Vektors kann man einen Abstandsbegriff einführen, der die Distanz zwischen zwei Ortsvektoren misst:

Definition 8.11. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.
Dann heißt eine Abbildung $d : V \times V \to \mathbb{R}$ eine *Metrik* auf V, wenn für alle $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V$ gilt:

(M1) $d(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0$ und $\big(d(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y}\big)$.

(M2) $d(\underline{x}, \underline{y}) = d(\underline{y}, \underline{x})$ (Symmetrie)

(M3) $d(\underline{x}, \underline{z}) \leq d(\underline{x}, \underline{y}) + d(\underline{y}, \underline{z})$ (Dreiecksungleichung).

Satz 8.12. Sei $\|\bullet\|$ eine Norm auf V über $\mathbb{R}$.
Dann ist die Abbildung

$$d : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$d(\underline{x}, \underline{y}) := \big\|\underline{y} - \underline{x}\big\| \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in V$$

eine Metrik auf V.

Beweis.

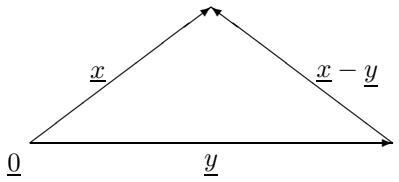
(M1): $d(\underline{x}, \underline{y}) = \big\|\underline{y} - \underline{x}\big\| \overset{(N1)}{\geq} 0$ und $d(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \Leftrightarrow \big\|\underline{y} - \underline{x}\big\| = 0 \Leftrightarrow \underline{y} = \underline{x}$.

(M2): $d(\underline{x}, \underline{y}) = \big\|\underline{y} - \underline{x}\big\| = \big\|(-1) \cdot (\underline{x} - \underline{y})\big\| \overset{(N2)}{=} |(-1)| \cdot \big\|\underline{x} - \underline{y}\big\| = d(\underline{y}, \underline{x})$.

(M3): $$\begin{aligned} d(\underline{x}, \underline{z}) &= \|\underline{z} - \underline{x}\| = \big\|\underline{z} - \underline{y} + \underline{y} - \underline{x}\big\| \\ &\overset{(N3)}{\leq} \big\|\underline{z} - \underline{y}\big\| + \big\|\underline{y} - \underline{x}\big\| = d(\underline{x}, \underline{y}) + d(\underline{y}, \underline{z}). \end{aligned}$$

□

Beispiel 8.13. $V = \mathbb{R}^3$, $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$



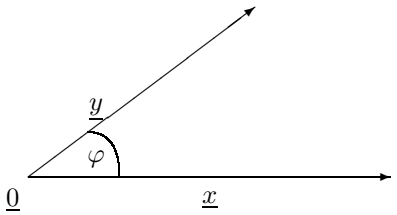
Skalarprodukt:	$(\underline{x}, \underline{y})$	$=$	$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$
Norm:	$\|\underline{x}\|$	$=$	$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$
Metrik:	$d(\underline{x}, \underline{y})$	$=$	$\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$

Wir wollen diesen Abschnitt mit einer geometrischen Anwendung des Standardskalarproduktes im $\mathbb{R}^n$ abschließen:

Satz 8.14. Für $V = \mathbb{R}^n$, $(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ und $\|\underline{x}\| = \sqrt{(\underline{x}, \underline{x})}$ gilt:

$$(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x}\| \cdot \big\|\underline{y}\big\| \cdot \cos\varphi,$$

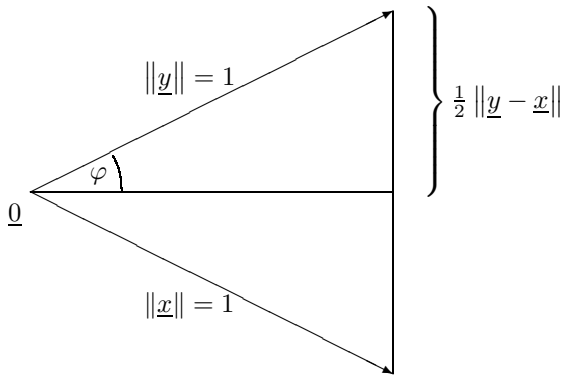
wobei $\varphi = \angle(\underline{x}, \underline{y})$ den Winkel zwischen den (als Ortsvektoren aufgefassten) Vektoren $\underline{x}$ und $\underline{y}$ bezeichnet.



Beweis.

Fall 1: $\underline{x} = \underline{0}$ oder $\underline{y} = \underline{0} \Rightarrow (\underline{x}, \underline{y}) = 0$ ✓

Fall 2: $\|\underline{x}\| = \|\underline{y}\| = 1$



$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \sin\tfrac{\varphi}{2} &= \tfrac{1}{2}\|\underline{y} - \underline{x}\| \\
\Rightarrow \quad \cos\varphi &= 1 - 2\sin^2(\tfrac{\varphi}{2}) \\
&= 1 - \tfrac{1}{2}\|\underline{y} - \underline{x}\|^2 \\
&= 1 - \tfrac{1}{2}(\underline{y} - \underline{x}, \underline{y} - \underline{x}) \\
&= 1 - \tfrac{1}{2}[(\underline{y}, \underline{y}) - 2(\underline{x}, \underline{y}) + (\underline{x}, \underline{x})] \\
&= 1 - \tfrac{1}{2}\underbrace{\|\underline{y}\|^2}_{=1} - \tfrac{1}{2}\underbrace{\|\underline{x}\|^2}_{=1} + (\underline{x}, \underline{y}) \\
&= (\underline{x}, \underline{y}) \\
\Rightarrow \quad (\underline{x}, \underline{y}) &= \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \cdot \cos\varphi \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Fall 3: $\underline{x} \neq \underline{0}$ und $\underline{y} \neq \underline{0}$

$\Rightarrow \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}$ und $\frac{\underline{y}}{\|\underline{y}\|}$ sind Vektoren der Länge 1, so dass aus Fall 2 folgt:

$$\cos\varphi = (\frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}, \frac{\underline{y}}{\|\underline{y}\|}) = \frac{1}{\|\underline{x}\| \, \|\underline{y}\|}(\underline{x}, \underline{y}) \quad \checkmark$$

□

Bemerkung. Die Gleichung

$$\cos\varphi = \frac{(\underline{x},\underline{y})}{\|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|}$$

kann man dazu verwenden, den „Winkel“ zwischen zwei Vektoren in einem beliebigen Vektorraum mit Skalarprodukt zu definieren.
Ist $(\underline{x},\underline{y}) = 0$, so folgt $\cos\varphi = 0$ und damit $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
Diese Beziehung verallgemeintert also den Begriff der *Orthogonalität*, den wir im folgenden Abschnitt ausführlich behandeln werden.

8.2 Orthogonalität

Definition 8.15. Sei $(\bullet,\bullet)$ ein Skalarprodukt auf V über $\mathbb{R}$.

(1) $\underline{x},\underline{y} \in V$ heißen *orthogonal* genau dann, wenn gilt:

$$(\underline{x},\underline{y}) = 0.$$

(2) $\underline{x} \in V$ heißt *normiert* genau dann, wenn gilt:

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{(\underline{x},\underline{x})} = 1.$$

(3) $\{\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_r\} \subseteq V$ heißt *Orthogonalsystem* (OS) genau dann, wenn gilt:

$$(\underline{x}_i,\underline{x}_j) = 0 \quad \forall i \neq j, 1 \leq i,j \leq r.$$

(4) $\{\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_r\} \subseteq V$ heißt *Orthonormalsystem* (ONS) genau dann, wenn gilt:

$$(\underline{x}_i,\underline{x}_j) = \delta_{ij} \quad \forall 1 \leq i,j \leq r$$

$$\text{mit } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{(vgl. Satz 5.18)}$$

(5) $\{\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_r\} \subseteq V$ heißt *Orthonormalbasis* (ONB) genau dann, wenn gilt:

$\{\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_r\}$ ist Basis von V und ein ONS.

Beispiel 8.16. $V = \mathbb{R}^3$, $(\underline{x},\underline{y}) = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$, $\|\underline{x}\| = \sqrt{(\underline{x},\underline{x})}$.

(1) $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\underline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind orthogonal, denn

$$(\underline{x},\underline{y}) = 1 + 1 - 2 = 0.$$

$\Rightarrow \{\underline{x},\underline{y}\}$ ist ein OS, aber kein ONS.

(2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine ONB von $\mathbb{R}^3$.

Im Folgenden werden wir die Frage beantworten, wie man ausgehend von einer beliebigen Basis $\{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n\}$ eines euklidischen Vektorraums V über $\mathbb{R}$ zu einer ONB $\left\{\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_n\right\}$ gelangen kann.

Satz 8.17. *Orthonormalisierungsverfahren von (Gram und) Schmidt.*
In einem Praehilbertraum V über $\mathbb{R}$ sei eine Menge $\{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n\} \subseteq V$ linear unabhängiger Vektoren gegeben.
Dann existiert ein ONS $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\} \subseteq V$ mit der Eigenschaft

$$\text{Span}\,\{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n\} = \text{Span}\,\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}\,.$$

Man erhält $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ durch folgende Rekursion:

$$\begin{aligned} \underline{w}_1 &:= \underline{u}_1 \\ \underline{w}_k &:= \underline{u}_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\underline{u}_k, \underline{v}_j) \cdot \underline{v}_j, \quad k = 2, 3, \ldots, n \\ \underline{v}_j &:= \frac{\underline{w}_j}{\|\underline{w}_j\|}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Beweis. Nach Konstruktion gilt $\|\underline{v}_j\| = 1 \,\forall j = 1, \ldots, n$.
Die Orthogonalität $(\underline{v}_{k+1}, \underline{v}_j) = 0 \forall j = 1, \ldots, k < n$ zeigen wir durch vollständige Induktion nach k:

Induktionsverankerung: $k = 1$:

$$\begin{aligned} (\underline{v}_2, \underline{v}_1) &= \left(\frac{\underline{w}_2}{\|\underline{w}_2\|}, \underline{v}_1 \right) \\ &= \frac{1}{\|\underline{w}_2\|} \cdot (\underline{w}_2, \underline{v}_1) \\ &= \frac{1}{\|\underline{w}_2\|} \cdot (\underline{u}_2 - (\underline{u}_2, \underline{v}_1) \cdot \underline{v}_1, \underline{v}_1) \\ &= \frac{1}{\|\underline{w}_2\|} \cdot \left[(\underline{u}_2, \underline{v}_1) - (\underline{u}_2, \underline{v}_1) \cdot \underbrace{\|\underline{v}_1\|^2}_{=1} \right] = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Induktionsannahme: Sei die Aussage richtig für alle $l = 1, \ldots, k$, d.h., sei

$$(\underline{v}_{l+1}, \underline{v}_j) = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, l \text{ und } \forall l = 1, \ldots, k.$$

Induktionsschritt: $k \longrightarrow k + 1$:

$$\begin{aligned} (\underline{v}_{k+2}, \underline{v}_j) &= \frac{1}{\|\underline{w}_{k+2}\|} \cdot (\underline{w}_{k+2}, \underline{v}_j) \\ &= \frac{1}{\|\underline{w}_{k+2}\|} \cdot \left(\underline{u}_{k+2} - \sum_{i=1}^{k+1} (\underline{u}_{k+2}, \underline{v}_i) \cdot \underline{v}_i, \underline{v}_j \right) \\ &= \frac{1}{\|\underline{w}_{k+2}\|} \cdot \left[(\underline{u}_{k+2}, \underline{v}_j) - \sum_{i=1}^{k+1} (\underline{u}_{k+2}, \underline{v}_i) \cdot \underbrace{(\underline{v}_i, \underline{v}_j)}_{\delta_{ij}} \right] \\ &= \frac{1}{\|\underline{w}_{k+2}\|} \cdot \left[(\underline{u}_{k+2}, \underline{v}_j) - (\underline{u}_{k+2}, \underline{v}_j) \right] = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Ist $\{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n\} \subseteq V$ eine Basis von V, so erhält man mit dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren eine ONB.

Beispiel 8.18. Sei V der von $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ aufgespannte Teilraum des $\mathbb{R}^3$ und sei $(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^3$.

Anwendung des Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens auf $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ liefert:

$k = 1$:

$$\underline{w}_1 = \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_1 = \frac{\underline{w}_1}{\|\underline{w}_1\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$k = 2$:

$$\begin{aligned} \underline{w}_2 &= \underline{u}_2 - (\underline{u}_2, \underline{v}_1) \cdot \underline{v}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{3} \cdot [4 + 8 + 5] \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} - \tfrac{17}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ -2 \\ -28 \end{pmatrix} = -\tfrac{2}{9} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \|\underline{w}_2\| &= \tfrac{2}{9} \cdot \sqrt{64 + 1 + 196} = \tfrac{2}{9}\sqrt{261} \end{aligned}$$

$$\underline{v}_2 = \frac{\underline{w}_2}{\|\underline{w}_2\|} = -\frac{1}{\sqrt{261}} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3\sqrt{29}} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Wir werden im Folgenden den Begriff der Orthogonalität benutzen, um spezielle Minimierungsprobleme zu lösen.

Satz 8.19. Sei V ein Praehilbertraum über $\mathbb{R}$ und $d : V \times V \to \mathbb{R}$ die durch das Skalarprodukt induzierte Metrik. Außerdem seien $\underline{x} \in V$ und $U \subset V$ ein Unterraum von V.
Dann gilt:

(1) $\underline{p} \in U$ hat genau dann den kürzesten Abstand zu $\underline{x}$ unter allen Elementen von U, wenn $\underline{p}$ die *orthogonale Projektion* von $\underline{x}$ auf U ist, d.h. wenn gilt:

$$(\underline{x} - \underline{p}, \underline{u}) = 0 \quad \forall \underline{u} \in U.$$

(2) Sei $B = \{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_m\}$ eine ONB von U. Dann ist

$$\underline{p} = \sum_{i=1}^{m} (\underline{x}, \underline{u}_i) \cdot \underline{u}_i$$

die orthogonale Projektion von $\underline{x}$ auf U, und diese ist eindeutig.

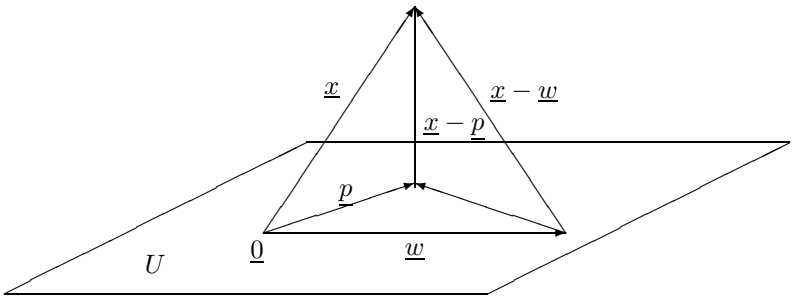
Beweis.

(1)

Fall 1: $\underline{x} \in U$

$$\Rightarrow \big(\underline{p} = \underline{x} \Leftrightarrow (\underline{x} - \underline{p}, \underline{u}) = 0 \,\forall \underline{u} \in U\big) \quad \checkmark$$

Fall 2: $\underline{x} \notin U$.
Sei $\underline{w} \in U$ beliebig.



$$\begin{aligned}
\Rightarrow [d(\underline{w},\underline{x})]^2 &= (\underline{x}-\underline{w}, \underline{x}-\underline{w}) \\
&= (\underline{p}-\underline{w}+\underline{x}-\underline{p}, \underline{p}-\underline{w}+\underline{x}-\underline{p}) \\
&= (\underline{p}-\underline{w}, \underline{p}-\underline{w}) + 2\underbrace{(\underbrace{\underline{p}-\underline{w}}_{\in U}, \underline{x}-\underline{p})}_{=0} + (\underline{x}-\underline{p}, \underline{x}-\underline{p}) \\
&= \underbrace{[d(\underline{w},\underline{p})]^2}_{\geq 0 \text{ und } =0 \Leftrightarrow \underline{w}=\underline{p}} + \underbrace{[d(\underline{p},\underline{x})]^2}_{\text{konstant}} \\
&\geq [d(\underline{p},\underline{x})]^2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow [d(\underline{w},\underline{x})]^2$ (und damit auch $d(\underline{w},\underline{x})$) wird für $\underline{w} = \underline{p}$ minimal.

(2) Sei $\underline{p} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \underbrace{(\underline{x},\underline{u}_i)}_{\in\mathbb{R}} \cdot \underline{u}_i}_{\in U}$ und sei $\underline{u} \in U$ beliebig. $\Rightarrow \underline{u} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \underline{u}_i$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (\underline{x}-\underline{p}, \underline{u}) &= (\underline{x} - \sum_{i=1}^{m} (\underline{x},\underline{u}_i)\cdot\underline{u}_i, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \underline{u}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\underline{x},\underline{u}_i) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} (\underline{x},\underline{u}_i)\lambda_j \cdot \underbrace{(\underline{u}_i,\underline{u}_j)}_{=\delta_{ij}} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\underline{x},\underline{u}_i) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\underline{x},\underline{u}_i) = 0 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit von $\underline{p}$ folgt analog zum Beweis von Teil (1). □

Beispiel 8.20. Sei $A\underline{x} = \underline{b}$ ein inkonsistentes LGS über $\mathbb{R}$
(d.h., das LGS $A\underline{x} = \underline{b}$ besitzt keine Lösung, vgl. Definition 5.23).
Inkonsistente LGS kommen in der Praxis häufig vor, wenn z.B. leichte Fehler in den Daten $(A, \underline{b})$ vorliegen. Trotzdem ist man an einer Lösung bzw. an einer möglichst guten Approximation $\overline{\underline{x}}$ der Lösung interessiert.

Sei dazu

$$U := \text{Span}\{A_{\bullet 1}, \ldots, A_{\bullet n}\}$$

der von den Spalten $A_{\bullet j}$ von $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ aufgespannte Unterraum des $\mathbb{R}^m$. Dann ist

$$U = \{A\underline{x} : \underline{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

und $\underline{b}$ nicht in U (da $A\underline{x} = \underline{b}$ nicht lösbar).
Gesucht ist $\underline{p} = A\overline{\underline{x}} \in U$, so dass $d(\underline{b}, \underline{p})$ minimal ist, also eine orthogonale Projektion $\underline{p}$ von $\underline{b}$ auf U.

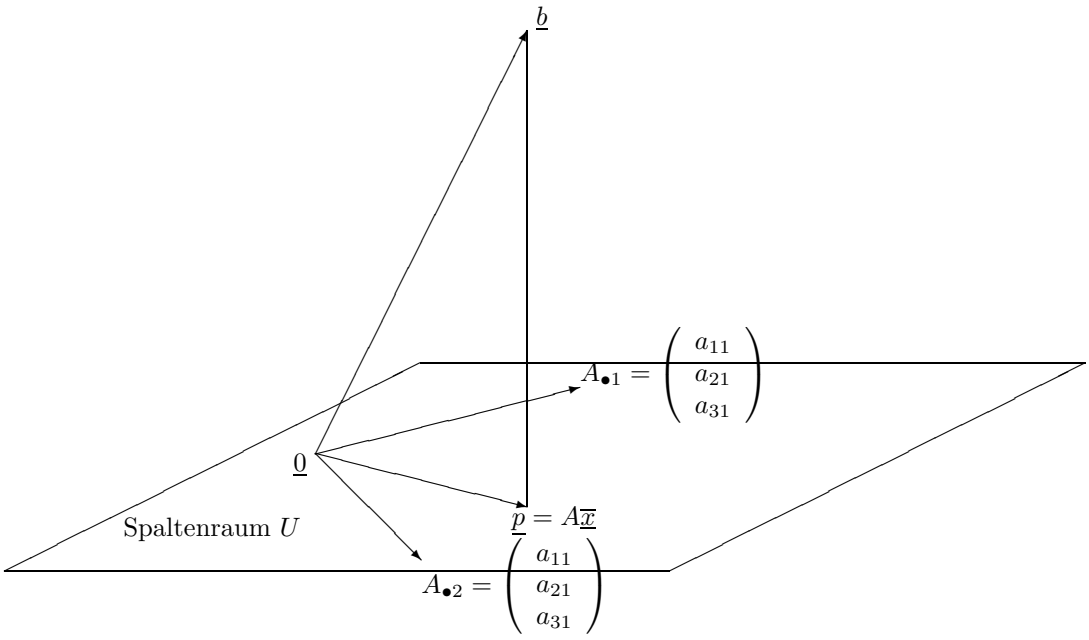
Für das LGS

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

erhält man z.B.

$$U = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}\right\} = \text{Span}\underbrace{\left\{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, -\frac{1}{3\sqrt{29}}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix}\right\}}_{\text{ONB von } U, \text{ vgl. Beispiel 8.18}}$$

und $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix} \notin U$, d.h. das LGS ist inkonsistent. Mit Hilfe von Satz 8.19 (2) berechnet man die orthogonale Projektion $\underline{p}$ von $\underline{b}$ auf U:



$$
\begin{aligned}
\underline{p} &= (\underline{b}, \underline{u}_1) \cdot \underline{u}_1 + (\underline{b}, \underline{u}_2) \cdot \underline{u}_2 \\
&= \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&\quad + \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix}, -\tfrac{1}{3\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(-\tfrac{1}{3\sqrt{29}} \right) \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{29} \cdot \begin{pmatrix} -112 \\ -14 \\ -196 \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{29} \cdot \begin{pmatrix} 62 \\ -188 \\ -283 \end{pmatrix} \\
&= A\overline{\underline{x}}
\end{aligned}
$$

Die approximative Lösung $\overline{\underline{x}}$ erhält man nun durch Lösung des modifizierten LGS

$$
\begin{array}{cccc}
A & \overline{\underline{x}} & = & \underline{p} \\
\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} & = & \tfrac{1}{29} \begin{pmatrix} 62 \\ -188 \\ -283 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \overline{x}_1 &= -\tfrac{32}{29} \approx 1,1034 \\
\overline{x}_2 &= \tfrac{63}{29} \approx 2,1724.
\end{aligned}
$$

8.3 Orthogonale Matrizen und Eigenwertaufgaben

Definition 8.21. Eine Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ heißt *orthogonal*, wenn ihre Spaltenvektoren $A_{\bullet j}$, $j = 1, \ldots, n$, ein ONS bilden.

Bemerkung. Es wird also auch gefordert, dass die Spaltenvektoren normiert sind!

Beispiel 8.22.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ ist orthogonal.

(2) $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ ist orthogonal für alle $\varphi \in \mathbb{R}$.

Satz 8.23. Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) Die Spaltenvektoren $A_{\bullet j}$, $j = 1, \ldots, n$, bilden ein ONS.

(2) Die Zeilenvektoren $A_{i\bullet}$, $i = 1, \ldots, n$, bilden ein ONS.

(3) A ist regulär und $A^{-1} = A^T$.

Beweis.

(1)⇔(3): $A^T \cdot A = (b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$, wobei b_{ij} das Produkt der i-ten Zeile von A^T (also der i-ten Spalte von A) mit der j-ten Spalte von A ist.
Es gilt:

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow \quad & b_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & A^T \cdot A = A \cdot A^T = I_n \\ \Leftrightarrow \quad & A^T = A^{-1} \qquad\qquad \Leftrightarrow (3). \end{aligned}$$

(2)⇔(3): Analog zum Beweis der Äquivalenz von (1) und (3).

□

Orthogonale Matrizen bzw. die zugehörigen linearen Abbildungen haben eine interessante geometrische Eigenschaft:

Definition 8.24. Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ und $(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$.
Die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(\underline{x}) := A \cdot \underline{x}$ heißt *metrische Abbildung*, wenn sie längen- und winkeltreu ist, d.h., wenn für alle $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$(A\underline{x}, A\underline{y}) = (\underline{x}, \underline{y}).$$

Satz 8.25. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(\underline{x}) := A \cdot \underline{x}$ ist metrisch genau dann, wenn A orthogonal ist.

Beweis.

„⇐“: A orhogonal ⇒

$$(A\underline{x}, A\underline{y}) = (A \cdot \underline{x})^T \cdot (A \cdot \underline{y}) = \underline{x}^T \underbrace{A^T A}_{=I_n} \underline{y} = \underline{x}^T \underline{y} = (\underline{x}, \underline{y}).$$

„⇒“: f metrisch ⇒

$$(A_{\bullet i}, A_{\bullet j}) = (A\underline{e}_i, A\underline{e}_j) = (\underline{e}_i, \underline{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(dabei ist $\underline{e}_i$ der i-te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$).

□

Folgerung. Eine orthogonale Matrix A transformiert also eine ONB $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$ des $\mathbb{R}^n$ in eine andere ONB $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\} := \{A\underline{e}_1, \ldots, A\underline{e}_n\}$.

Orthogonale Matrizen spielen eine wichtige Rolle bei der Diagonalisierung von sogenannten quadratischen Formen:

Definition 8.26. Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\underline{x}) := \underline{x}^T A \underline{x}$ heißt (die durch A definierte) *quadratische* Form.

Beispiel 8.27. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}), f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcccccl} f(\underline{x}) & = & \underline{x}^T & & A & & \underline{x} \\ & = & (x_1, x_2) & \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = 5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 \end{array}$$

Gesucht ist nun eine orthogonale Koordinatentransformation

$$\underline{x} = B\underline{y} \text{ bzw. } \underline{y} = \underbrace{B^{-1}}_{=B^T}\underline{x},$$

so dass die quadratische Form $f(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$ die einfache Gestalt

$$f(\underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = \underline{y}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \underline{y}$$

erhält, in der keine gemischten Terme mehr auftauchen.

Beispiel 8.28. (Fortsetzung von Beispiel 8.27)
Durch die Rotation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

bringt man die quadratische Form

$$f(\underline{x}) = 5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$$

in die Form

$$f(\underline{y}) = 8y_1^2 + 2y_2^2.$$

Damit erkennt man z.B. den Kegelschnitt

$$5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 = 2$$

im neuen Koordinatensystem als Ellipse

$$8y_1^2 + 2y_2^2 = 2.$$

Lösungsansatz: Diagonalisierbarkeit von Matrizen (Abschnitt 7.2) nutzen! Gesucht ist nämlich eine Matrix $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ mit

(1)

$$\underline{x} = B\underline{y},\ \underline{y} = B^{-1}\underline{x} = B^T\underline{x},\ \text{und}$$

(2)

$$f(\underline{y}) = (B\underline{y})^T A(B\underline{y}) = \underline{y}^T B^T AB\underline{y} = \underline{y}^T B^{-1} AB\underline{y},$$

wobei

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{Diagonalmatrix sein soll.}$$

Algorithmus 8.29. Diagonalisierung von quadratischen Formen

(Input) $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, symmetrisch.

(1) Bestimme $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, so dass B regulär ist und das gilt:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Bestimmme dazu die (Eigenwerte und) Eigenräume von A (vgl. Abschnitt 7.2). Dabei wird von jedem Eigenraum eine Orthonormalbasis bestimmt (z.B. mit dem Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt aus Satz 8.17).
Die so orthonormalisierten Eigenvektoren bilden die Spalten $B_{\bullet 1}, \ldots, B_{\bullet n}$ von B.

(2) Setze

$$\underline{y} := B\underline{x} \text{ und } f(\underline{y}) := \underline{y}^T B^{-1} AB\underline{y}$$

(Output) $f(\underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$.

Bemerkung.

(1) Für symmetrische Matrizen $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ sind *alle* Eigenwerte reell, und es gibt *immer* n paarweise orthogonale Eigenvektoren, die mit dem obigen Verfahren bestimmt werden können.

(2) Jede quadratische Form lässt sich mit Hilfe einer symmetrischen Matrix darstellen.

Teil II

Analysis

Kapitel 9

Folgen und Reihen

9.1 Folgen

Definition 9.1. Sei M eine Menge. Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$, die jeder natürlichen Zahl $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ein Element $a_n \in M$ zuordnet, heißt *Folge*. Ist $M = \mathbb{R}$, so nennt man (a_n) auch *reelle Zahlenfolge*. Im Fall $M = \mathbb{C}$ heißt (a_n) *komplexe Zahlenfolge*.

Schreibweise:

$$(a_n), \quad (a_n)_{n\geq 0}, \quad \{a_n\}, \quad \ldots$$

Der Index n kann auch anders bezeichnet werden und kann ab 1 oder ab jeder anderen ganzen Zahl laufen.

Beispiel 9.2.

(1) $a_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: *explizit* definierte reelle Zahlenfolge

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, \ldots$$

(2) $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n,\ n \geq 1$:

$$a_1 = 2, a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2, a_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3, a_4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4, \ldots$$

(3) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, *rekursiv* definierte reelle Zahlenfolge, die sogenannten *Fibonacci-Zahlen*

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, a_7 = 13, \ldots$$

(4) $a_n = i^n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$: komplexe Zahlenfolge

$$a_0 = 1, a_1 = i, a_2 = -1, a_3 = -i, a_4 = 1, a_5 = i, \ldots$$

(5) $a_n = a_0 + n \cdot d,\ n \geq 0$ mit $a_0, d \in \mathbb{R}$: *arithmetische Folge*

$$a_0 = a_0, a_1 = a_0 + d, a_2 = a_0 + 2 \cdot d, a_3 = a_0 + 3 \cdot d, \ldots$$

(6) $a_n = a_0 \cdot q^n$, $n \geq 0$ mit $a_0, q \in \mathbb{R}$: *geometrische Folge*

$$a_0 = a_0, a_1 = a_0 \cdot q, a_2 = a_0 \cdot q^2, a_3 = a_0 \cdot q^3, \ldots$$

Bezeichnung.

- a_n, $n \in \mathbb{N}$ heißt *Folgenglied* der Folge (a_n).
- Das erste Element einer Folge (a_n) heißt *Anfangsglied* der Folge (a_n).

Im Folgenden verstehen wir unter einer Folge stets eine reelle Zahlenfolge.

Definition 9.3.

(1) Eine Folge (a_n) heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl $C > 0$ gibt, so dass gilt:

$$|a_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(2) Eine Folge (a_n) heißt *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*), wenn gilt:

$$a_{n+1} \geq a_n \; \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{bzw. } a_{n+1} \leq a_n \; \forall n \in \mathbb{N}).$$

Beispiel 9.4. Von den Folgen aus Beispiel 9.2 ist zum Beispiel

(a) die Folge (1) beschränkt

(b) die Folge (3) monoton wachsend

(c) die Folge (5) monoton wachsend, wenn $d > 0$ und monoton fallend, wenn $d < 0$ ist

(d) die Folge (6) monoton wachsend, wenn $q > 1$ und monoton fallend, wenn $0 < q < 1$ ist.

9.2 Konvergenz von reellen Zahlenfolgen

Definition 9.5. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert der Folge (a_n), wenn zu jedem positiven $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.
Kurz:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \; |a_n - a| < \varepsilon \; \forall n \geq n_0(\varepsilon).$$

Die Folge (a_n) heißt dann *konvergent* mit *Grenzwert* a.

Schreibweise:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a.$$

Beispiel 9.6. $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist konvergent mit Grenzwert $a = 0$, denn:

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ für } n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow n_0(\varepsilon) := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$$

Also ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Bemerkung. Die Konvergenz einer Zahlenfolge in Definition 9.5 kann äquivalent folgendermaßen definiert werden: Die Folge (a_n) *konvergiert* gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn in jeder ε Umgebung $N_\varepsilon(a)$ von a fast alle Folgenglieder liegen (dabei bedeudet „fast alle“: bis auf endlich viele, und eine „ε-Umgebung von a“ ist:

$$N_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

mit $\varepsilon > 0$).

Satz 9.7. Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Annahme: Es gibt $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq b$, so dass (a_n) sowohl gegen a als auch gegen b konvergiert. Setze

$$\begin{aligned} & \varepsilon := \tfrac{1}{2} \cdot \underbrace{|a - b|}_{\neq 0} > 0 \\ \Rightarrow \quad & \exists n_0^a \in \mathbb{N} \text{ mit } |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0^a, \text{ und} \\ & \exists n_0^b \in \mathbb{N} \text{ mit } |a_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0^b. \end{aligned}$$

Setze $n_0(\varepsilon) := \max\{n_0^a, n_0^b\}$.

$$\Rightarrow |a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a - b|,$$

ein Widerspruch. □

Definition 9.8. Eine Folge (a_n) die nicht konvergiert, heißt *divergent*.
Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$), so heißt (a_n) *bestimmt divergent*.
In diesem Fall gibt es für jede Zahl $C > 0$ ein $n_0(C) \in \mathbb{N}$, so dass $a_n > C \; \forall n \geq n_0(C)$ (bzw. $a_n < -C \; \forall n \geq n_0(C)$).
Kurz:

$$\begin{aligned} \forall C \geq 0 \quad \exists n_0(C) \in \mathbb{N} : \quad & a_n > C \quad \forall n \geq n_0(C) \\ (\text{bzw.} : \quad & a_n < -C \quad \forall n \geq n_0(C)). \end{aligned}$$

Andernfalls nenn man (a_n) *unbestimmt divergent*.

Beispiel 9.9.

(1) $a_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$ ist bestimmt divergent, denn es gilt

$$\begin{aligned} & a_n = n^2 > C \text{ für } n > \sqrt{C} \\ & \Rightarrow \text{Setze } n_0(C) := \left\lceil \sqrt{C} \right\rceil \\ & \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty. \end{aligned}$$

(2) $a_n = (-1)^n(1+\frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ ist unbestimmt divergent, denn es ist

$$a_1 = -2, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = -\frac{4}{3}, a_4 = \frac{5}{4}, \ldots$$

Aber: Es gibt zwei konvergente *Teilfolgen*:

$$(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \text{ mit } a_2 = \frac{3}{2}, a_4 = \frac{5}{4}, a_6 = \frac{7}{6}, \ldots$$

konvergiert gegen +1, und

$$(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } a_1 = -2, a_3 = -\frac{4}{3}, a_5 = -\frac{6}{5}, \ldots$$

konvergiert gegen -1.

Satz 9.10. Jede konvergente Folge (a_n) ist beschränkt.

Beweis. Sei (a_n) konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < 1 \, \forall n > n_0$ (setze $\varepsilon = 1$ in Definition 9.5).
Setze $C := \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |a|+1\}$
$\Rightarrow |a_n| \leq C \, \forall n \in \mathbb{N}$. □

Definition 9.11. Eine reelle Zahlenfolge heißt *Cauchy-Folge*, wenn gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0(\varepsilon)$.
Kurz:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \; |a_n - a_m| < \varepsilon \, \forall n, m \geq n_0(\varepsilon).$$

Satz 9.12. Jede konvergente Folge (a_n) ist eine Cauchy-Folge.

Beweis. Sei (a_n) konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \, \forall n \geq n_0$
$\Rightarrow$ Für $n, m \geq n_0$ gilt:

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |(a_n - a) + (a - a_m)| \\ &\leq |a_n - a| + |a - a_m| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Als Grundlage für die Definition der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ haben wir in Kapitel 3.3 das Vollständigkeitsaxiom (V) formuliert:

(V) Jede nach oben (bzw. nach unten) beschränkte nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt genau ein Supremum (bzw. Infimum) in $\mathbb{R}$.

Dieses Vollständigkeitsaxiom können wir nun im Zusammenhang mit Cauchy-Folgen neu formulieren:

Vollständigkeitsaxiom (V'): In $\mathbb{R}$ konvergiert jede Cauchy-Folge.

Den Zusammenhang zwischen beiden Formulierungen analysieren wir am Ende dieses Kapitels. Vorher benötigen wir noch den Begriff der Teilfolge und den im Folgenden sehr wichtigen Satz von Bolzano-Weierstraß über die Konvergenz von Teilfolgen beschränkter Folgen.

Definition 9.13. Sei (a_n) eine Folge und sei $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen.
Dann heißt die Folge

$$(a_{n_k}) = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$$

eine *Teilfolge* der Folge (a_n).

Satz 9.14. von *Bolzano-Weierstraß*.
Jede beschränkte Folge (a_n) besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis. Sei (a_n) eine beschränkte Folge.
$\overset{\text{Definition } 9.3}{\Rightarrow} \exists C > 0 : |a_n| \leq C \,\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists A, B \in \mathbb{R} : \; A \leq a_n \leq B \,\forall n \in \mathbb{N}.$
Sei $[A, B] := \{x \in \mathbb{R} : A \leq x \leq B\}$. Wir konstruieren nun induktiv für $k \in \mathbb{N}$ Intervalle $[A_k, B_k]$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) In $[A_k, B_k]$ liegen unendlich viele Elemente der Folge (a_n)

(2) $[A_{k+1}, B_{k+1}] \subset [A_k, B_k]$ und $|B_{k+1} - A_{k+1}| \leq \frac{1}{2} |B_k - A_k|$

(3) $[A_0, B_0] = [A, B]$.

Setze also $[A_0, B_0] := [A, B]$.

Induktionsannahme: Sei $[A_k, B_k]$ mit den Eigenschaften (1), (2), (3) konstruiert, $k \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: $k \to k + 1$:
Setze

$$M := \frac{A_k + B_k}{2}$$

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $[A_k, M]$ oder $[M, B_k]$ enthält unendlich viele Elemente von (a_n).
Setze

$$[A_{k+1}, B_{k+1}] := \begin{cases} [A_k, M] & \text{falls in } [A_k, M] \\ & \text{unendlich viele Elemente von } (a_n) \text{ liegen} \\ [M, B_k] & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $[A_{k+1}, B_{k+1}]$ erfüllt ebenfalls (1), (2) und (3), und es gilt

$$|B_{k+1} - A_{k+1}| \leq 2^{-(k+1)} |B - A| .$$

Wir konstruieren nun eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) mit $a_{n_k} \in [A_k, B_k]$, $k \in \mathbb{N}$.
Setze $a_{n_0} := a_0$.
Da in $[A_{k+1}, B_{k+1}]$ unendlich viele Elemente von (a_n) liegen,
kann man $a_{n_{k+1}} \in [A_{k+1}, B_{k+1}]$ auswählen mit $n_{k+1} > n_k$ für alle $k = 0, 1, 2, \dots$.
Es bleibt zu zeigen, dass die Teilfolge (a_{n_k}) konvergiert.

Nach dem Vollständigkeitsaxiom genügt es zu zeigen, dass (a_{n_k}) eine Cauchy-Folge ist. Sei also $\varepsilon > 0$ und wähle $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$2^{-(n_0(\varepsilon)+1)} \cdot (B - A) < \varepsilon.$$

Dann gilt für alle $k, j \geq n_0(\varepsilon)$:

(1) $a_{n_k} \in [A_k, B_k] \subset [A_{n_0(\varepsilon)}, B_{n_0(\varepsilon)}]$, und

(2) $a_{n_j} \in [A_j, B_j] \subset [A_{n_0(\varepsilon)}, B_{n_0(\varepsilon)}]$

$$\Rightarrow \quad \left|a_{n_k} - a_{n_j}\right| \leq 2^{-(n_0(\varepsilon)+1)} \cdot (B - A) < \varepsilon.$$

□

Aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß werden wir zunächst weitere Konvergenzkriterien für Folgen ableiten:

Satz 9.15. Jede nach oben beschränkte monoton wachsende Folge (a_n) konvergiert.

Beweis. Sei (a_n) monoton wachsend.
$\Rightarrow$ (a_n) ist auch nach unten beschränkt (z.B. durch $C = a_0$)
$\overset{\text{Satz 9.16}}{\Rightarrow}$ (a_n) besitzt eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}).
Sei $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.
Zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig.
$\Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} : \ |a_{n_k} - a| < \varepsilon \ \forall k \geq k_0$.
Es gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \geq n_{k_0} \exists k \geq k_0 : n_k \leq n < n_{k+1} \\ (a_n) \text{ monoton wachsend} \end{array}\right\} \Rightarrow a_{n_k} \leq a_n \leq a_{n_{k+1}}$$

$\Rightarrow |a_n - a| \leq \max\{|a_{n_k} - a|, \left|a_{n_{k+1}} - a\right|\} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_{k_0}$. □

Bemerkung. Entsprechend gilt natürlich: Jede nach unten beschränkte monoton fallende Folge (a_n) konvergiert.

Nun können wir den Zusammenhang des in diesem Abschnitt formulierten Vollständigkeitsaxioms (V') mit dem Vollständigkeitsaxiom (V) aus Kapitel 3.3 untersuchen.
Aus (V') folgt (V), d.h.:
Jede nach oben (bzw. nach unten) beschränkte nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt genau ein Supremum (bzw. Infimum) in $\mathbb{R}$.

Beweis. Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt.
$\Rightarrow \exists$ obere Schranke $c_0 \in \mathbb{R} : \ a \leq c_0 \ \forall a \in A$.
Sei $a_0 \in A$ beliebig.
Wir konstruieren nun induktiv

(1) eine Folge $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ von Elementen in A, und

(2) eine Folge $c_0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \ldots$ von oberen Schranken von A mit

$$|c_n - a_n| \leq 2^{-n} \cdot r \quad \text{mit konstantem } r \in \mathbb{R}$$

(zum Beispiel $r = c_0 - a_0 > 0$).

Induktionsannahme: $a_0, a_1, \ldots, a_n$ und $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sind schon konstruiert, $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: $n \to n+1$:
Setze

$$M := \frac{c_n - a_n}{2}.$$

Ist M eine obere Schranke von A, setze $a_{n+1} := a_n$ und $c_{n+1} := M$
Ist M keine obere Schranke von A, setze $a_{n+1} := M$ und $c_{n+1} := c_n$
In beiden Fällen gilt:

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad c_n \geq c_{n+1}, \text{ und } \quad c_{n+1} - a_{n+1} \leq 2^{-(n+1)} \cdot r$$

Damit ist die Folge (c_n) monoton fallend und nach unten beschränkt
$\overset{\text{Satz } 9.15}{\Rightarrow}$ (c_n) ist konvergent; setze $c := \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.
Zu zeigen: c ist die kleinste obere Schranke von A.

(1) c ist obere Schranke:
Sei $a \in A$ beliebig und setze $b_n = a$, $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ und $b_n \leq c_n \ \forall n \in \mathbb{N}$
$\overset{\text{Satz } 9.20}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} b_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} c_n \Rightarrow a \leq c.$

(2) c ist die kleinste obere Schranke:
Sei $c' < c$ und wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $2^{-n_0} < c - c'$
$\Rightarrow a_{n_0} \geq c_{n_0} - 2^{-n_0} r \geq c - 2^{-2n_0} r > c'$
$\Rightarrow c'$ ist keine obere Schranke von A.

□

9.3 Berechnung von Grenzwerten

Satz 9.16. Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

(1) Die Folge (c_n) mit $c_n = a_n + b_n$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert, und $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a + b$.

(2) Die Folge (c_n) mit $c_n = a_n \cdot b_n$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert, und $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \cdot b$.

Beweis.

(1) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists n_0^a \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} & \forall n \geq n_0^a \text{ und} \\ \exists n_0^b \in \mathbb{N} : |b_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} & \forall n \geq n_0^b. \end{cases}$$

Setze $n_0(\varepsilon) := \max\{n_0^a, n_0^b\}$.

$$\Rightarrow |(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon).$$

(2) (a_n), (b_n) konvergent $\overset{\text{Satz } 9.10}{\Rightarrow}$ (a_n), (b_n) beschränkt.
$\Rightarrow \exists C > 0$: $|a_n| \leq C$ und $|b_n| \leq C$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Sei $\varepsilon > 0$ bliebig.

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists n_0^a \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2C} & \forall n \geq n_0^a \text{ und} \\ \exists n_0^b \in \mathbb{N} : |b_n - a| < \frac{\varepsilon}{2C} & \forall n \geq n_0^b. \end{cases}$$

Setze $n_0(\varepsilon) := \max\{n_0^a, n_0^b\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad |a_n b_n - ab| &= |a_n \cdot (b_n - b) + (a_n - a) \cdot b| \\ &\leq |a_n \cdot (b_n - b)| + |(a_n - a) \cdot b| \\ &= |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| \\ &< C \cdot \tfrac{\varepsilon}{2C} + C \cdot \tfrac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon). \end{aligned}$$

□

Korollar 9.17.

(1) Sei (a_n) eine konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dann ist die Folge (λa_n) konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda a.$$

(2) Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann ist die Folge $(a_n - b_n)$ konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b.$$

Satz 9.18. Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $b_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$. Die Folge $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geq n_0}$ ist konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Beweis.

Fall 1: $a_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

(a) $b \neq 0$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : |b_n| > \frac{|b|}{2}$ $\forall n \geq n_0$
(denn: $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |b| - |b_n| < \frac{|b|}{2}$ $\forall n \geq n_0 \quad (\varepsilon = \frac{|b|}{2})$
$\Rightarrow |b| - |b_n| \leq |b - b_n| < \frac{|b|}{2} \Rightarrow -|b_n| < -\frac{|b|}{2}$ $\forall n \geq n_0$)
$\Rightarrow b_n \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$.

(b) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. (b_n) konvergiert

$$\Rightarrow \exists n_1 \geq n_0 : |b_n - b| < \frac{\varepsilon |b|^2}{2} \quad \forall n \geq n_1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b-b_n}{b_n b}\right| = \underbrace{\frac{1}{|b_n|}}_{<\frac{2}{|b|}} \cdot \frac{1}{|b|} \cdot \underbrace{|b - b_n|}_{<\frac{\varepsilon|b|^2}{2}} < \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{\varepsilon |b|^2}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq n_1.$$

Fall 2: (a_n) beliebige konvergent Folge, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : (\frac{a_n}{b_n})_{n\geq n_0} = (\frac{1}{b_n} \cdot a_n)_{n\geq n_0}$ mit $(\frac{1}{b_n})_{n\geq n_0}$ konvergent nach Fall 1, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$.

$\overset{\text{Satz } 9.16(2)}{\Longrightarrow}$ $(\frac{a_n}{b_n})_{n\geq n_0}$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

□

Beispiel 9.19.

$$a_n = \frac{4n^2 + 3n + 5}{n^2 - 6},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow\ a_n = \frac{4 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 - \frac{6}{n^2}},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Dann ist

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} 4 = 4$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 3 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 3 \cdot 0 = 0$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} = 5 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 5 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) = 5 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6}{n^2} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (4 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}) = 4$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{6}{n^2}) = 1$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{1} = 4.$

Satz 9.20. Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Beweis. Annahme: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b < a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Setze $\varepsilon = \frac{(a-b)}{2} > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists n_0^a \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon & \forall n \geq n_0^a \text{ und} \\ \exists n_0^b \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \varepsilon & \forall n \geq n_0^b. \end{cases}$$

Setze $n_0(\varepsilon) := \max\{n_0^a, n_0^b\}$

$$\Rightarrow \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \text{und} \quad b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon)$$

Außerdem gilt:

$$\varepsilon = \frac{(a-b)}{2} \quad \Rightarrow \quad a - \varepsilon = b + \varepsilon$$

Zusammenfassung:

$$b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n$$

im Widerspruch zu $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung. Sind (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $a_n < b_n \, \forall n \in \mathbb{N}$, so gilt im Allgemeinen nicht $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Beispiel 9.21. $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow a_n < b_n \, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ aber } \lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

9.4 Reihen

Definition 9.22. Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge. Dann heißt für $n \in \mathbb{N}$

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

die *n-te Partialsumme* der *unendlichen Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.
Die unendliche Reihe heißt *konvergent* genau dann, wenn die Folge (s_n) der Partialsummen konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$.
In diesem Fall schreibt man:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s.$$

Beispiel 9.23.

(1) $a_k = q^k$, $k \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$, $n \in \mathbb{N}$

(a) $q = 1 \Rightarrow s_n = n + 1, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty$.

(b) $q \neq 1 \Rightarrow$ Es gilt: $s_n - qs_n = 1 - q^{n+1} \Rightarrow s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, $n \in \mathbb{N}$

(i) $|q| < 1$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$, d.h., $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ ist konvergent.

(ii) $q = -1$
$\Rightarrow s_n = \frac{1}{2}(1 - (-1)^{n+1})$, d.h., $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ ist divergent.

(iii) $q > 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = \infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, d.h., $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ ist divergent.

(iv) $q < -1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = +\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = -\infty$, d.h., $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ ist divergent.

(2) $s_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

(Dabei ist $k! := 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k$ für $k \geq 1$ und $0! := 1$)

$\Rightarrow$ s_n ist monoton wachsend und beschränkt, denn

$k! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k \geq 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2 = 2^{k-1} \Rightarrow \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$

$\Rightarrow s_n \leq 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum\limits_{l=0}^{n-1} (\frac{1}{2})^l \overset{(1)}{=} 1 + \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} \leq 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$

$\overset{\text{Satz } 9.15}{\Rightarrow}$ s_n ist konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} s_n \leq 3$.

Bezeichnung. $e := \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ heißt *Eulersche Zahl*. Numerische Brechnungen ergeben:

$$e \approx 2,718281828459045\ldots$$

Satz 9.24. Seien $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei konvergente Reihen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k - b_k)$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k)$ konvergent und es gilt:

(1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) = (\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k) \pm (\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k)$

(2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Beweis. Folgt direkt aus Satz 9.16 und Korollar 9.17, angewendet auf die entsprechenden Folgen der Partialsummen. □

Satz 9.25. *Cauchy'sches Konvergenzkriterium für Reihen.*
Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n > m \geq N_0(\varepsilon)$ gilt: $\left| \sum\limits_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon$.
Kurz:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq N_0(\varepsilon)$$

Beweis. Sei $s_p = \sum_{k=0}^{p} a_k$ die p-te Partialsumme der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.
$\Rightarrow \sum_{k=m}^{n} a_k = s_n - s_{m-1}$. Damit ist die Aussage des Satzes äquivalent zu der Aussage, dass die Folge der Partialsummen s_p das Cauchy'sche Konvergenzkriterium für Folgen erfüllt (Satz 9.12 und (V')). □

Bemerkung. Aus Satz 9.25 folgt, dass für jede konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Satz 9.26. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0 \, \forall k \in \mathbb{N}$ konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.

Beweis.

„⇐": Wegen $a_k \geq 0 \, \forall k \in \mathbb{N}$ ist die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ monoton wachsend. Aus ihrer Beschränktheit folgt nach Satz 9.15 ihre Konvergenz.

„⇒": Die Umkehrung folgt aus Satz 9.10 (jede konvergente Folge ist beschränkt).

□

Beispiel 9.27. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent, denn die Bedingung von Satz 9.26 ist nicht erfüllt:
Die Folge der Partialsummen (s_n) ist gegeben durch $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Dann kann s_n für $n = 2^{p+1}$, $p \geq 1$, folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
s_{2^{p+1}} &= \sum_{k=1}^{2^{p+1}} \frac{1}{k} \\
&= 1 + \tfrac{1}{2} + \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{k=2^l+1}^{2^{l+1}} \frac{1}{k} \right) \\
&= 1 + \tfrac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{>\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2}} + \cdots + \underbrace{\sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}} \frac{1}{k}}_{>2^p \cdot \frac{1}{2^{p+1}}=\frac{1}{2}} \\
&> 1 + p \cdot \tfrac{1}{2} \quad \forall p \geq 1.
\end{aligned}$$

⇒ Die Folge der Partialsummen ist unbeschränkt.

Bemerkung. Beispiel 9.27 zeigt, dass aus $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ nicht folgt, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert!

Satz 9.28. *Leibniz'sches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen.*
Sei (a_k) eine monoton fallende Folge mit $a_k \geq 0 \, \forall k \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_k = 0$.
Dann konvergiert die *alternierende Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k.$$

Beweis. Setze $s_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$.
Dann ist $s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$ und es folgt

(1) $s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq \cdots$

Analog ist wegen $s_{2n+3} - s_{2n+1} = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0$

(2) $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots$

Außerdem gilt wegen $s_{2n+1} - s_{2n} = -a_{2n+1} \leq 0$ auch

(3) $s_{2n+1} \leq s_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Konsequenz:

(a) Die Folge $(s_{2n})_{n\geq 0}$ ist monoton fallend und nach unten beschränkt, da

$$s_{2n} \overset{(3)}{\geq} s_{2n+1} \overset{(2)}{\geq} s_1.$$

$\overset{\text{Satz } 9.15}{\Rightarrow}$ (s_{2n}) ist konvergent; setze $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} =: s'$.

(b) Die Folge $(s_{2n+1})_{n\geq 0}$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt, da

$$s_{2n+1} \overset{(3)}{\leq} s_{2n} \overset{(1)}{\leq} s_0.$$

$\overset{\text{Satz } 9.15}{\Rightarrow}$ (s_{2n+1}) ist konvergent; setze $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} =: s''$.

Behauptung: $s' = s'' =: s$ und $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.
Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} s' - s'' &= \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} (s_{2n} - s_{2n+1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} (-a_{2n+1}) = 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow s := s' = s''$.
Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. $\Rightarrow \exists n_0', n_0'' \in \mathbb{N} : \left\{ \begin{array}{lcll} |s_{2n} - s| & < & \varepsilon & \forall n \geq n_0' \\ |s_{2n+1} - s| & < & \varepsilon & \forall n \geq n_0'' \end{array} \right. \Rightarrow$
Für $n_0(\varepsilon) := \max\{2n_0', 2n_0'' + 1\}$ gilt:

$$|s_n - s| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon)$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. □

Für viele Untersuchungen ist es sinnvoll, zu einer Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ die Reihe der Absolutbeträge der Reihenglieder $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ zu betrachten:

Definition 9.29. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent, so nennt man die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent*.

Bemerkung. Aus der Konvergenz einer Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ folgt im Allgemeinen nicht ihre absolute Konvergenz.

Beispiel 9.30. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ ist nach Satz 9.28 konvergent, aber

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

ist divergent (vgl. Beispiel 9.27).

Allerdings gilt die Umkehrung, d.h.:

Satz 9.31. Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

Beweis. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent

$\overset{\text{Satz } 9.25}{\Longrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq N_0(\varepsilon).$

Nach der Dreiecksungleichung ist

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| = \left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right|$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon \, \forall n > m \geq N_0(\varepsilon)$

$\Rightarrow$ das Cauchy'sche Konvergenzkriterium (Satz 9.25) ist auch für $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ erfüllt. □

Definition 9.32. Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei Reihen.

(1) Gilt für fast alle k: $|a_k| \leq b_k$, so heißt $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine *Majorante* von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. (dabei bedeudet „für fast alle“: bis auf endlich viele).

(2) Gilt für fast alle k: $0 \leq a_k \leq b_k$, so heißt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine *Minorante* von $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

Satz 9.33. *Vergleichskriterium für die Konvergenz unendlicher Reihen.*

(1) Ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine konvergente Majorante von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

(2) Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine divergente Minorante von $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent.

Beweis.

(1) Sei $|a_k| \leq b_k$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent.
Da die Abänderung endlich vieler Reihenglieder nichts am Konvergenzverhalten ändert, können wir annehmen, dass $|a_k| \leq b_k \; \forall k \in \mathbb{N}$. Sei nun $\varepsilon > 0$.

$$\overset{\text{Satz } 9.25}{\Rightarrow} \quad \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \sum_{k=m}^{n} b_k = \left| \sum_{k=m}^{n} b_k \right| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq N_0(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \quad \left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| = \sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} b_k < \varepsilon \quad \forall n > m \geq N_0(\varepsilon).$$

(2) Wir können wie in (1) annehmen, dass $0 \leq a_k \leq b_k \forall k \in \mathbb{N}$ gilt. Außerdem ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.
$\overset{\text{Satz } 9.26}{\Rightarrow}$ Die Folge der Partialsummen (s_n) mit $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ ist nicht beschränkt.
$\Rightarrow$ Die Folge der Partialsummen (t_n) mit $t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \geq \sum_{k=0}^{n} a_k = s_n$ ist nicht beschränkt.
$\overset{\text{Satz } 9.26}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist divergent.

□

Wir haben in Beispiel 9.23 gesehen, dass die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ genau dann konvergiert, wenn $|q| < 1$ gilt. Wir werden diese Reihe nun in Satz 9.33 als Vergleichsreihe benutzen, um weitere Kriterien für die absolute Konvergenz von Reihen herzuleiten.

Satz 9.34. *Wurzelkriterium.*
Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe.

(1) Gibt es ein $q < 1$, so dass $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

(2) Gibt es ein $q \geq 1$, so dass $\sqrt[k]{|a_k|} \geq q \geq 1$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Beweis.

(1) $|a_k| \leq q^k$ für fast alle k und $0 \leq q < 1$
$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ist eine konvergente Majorante zu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.
$\overset{\text{Satz } 9.33}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.

(2) $|a_k| \geq 1$ für fast alle k
$\Rightarrow (a_k)$ ist keine Nullfolge
$\overset{\text{Satz } 9.25,\ \text{Bem.}}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist divergent.

□

Satz 9.35. *Quotientenkriterium.*
Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe, wobei $a_k \neq 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$.

(1) Gibt es ein $q < 1$, so dass $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

(2) Gibt es ein $q \geq 1$, so dass $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq q \geq 1$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ divergent.

Beweis.

(1) $\exists k_0 \in \mathbb{N} : |a_{k+1}| \leq q \cdot |a_k| \ \forall k \geq k_0$
$\Rightarrow |a_{k_0+l}| \leq q^l \cdot |a_{k_0}| \ \forall l \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ mit

$$b_k := \begin{cases} |a_k| & \text{für } k < k_0 \\ q^{k-k_0}\,|a_{k_0}| & \text{für } k \geq k_0 \end{cases}$$

ist eine konvergente Majorante von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, da

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| &= \underbrace{\sum_{k=0}^{k_0-1} |b_k|}_{=:b_0} + \sum_{k=k_0}^{\infty} |b_k| \\ &= b_0 + \sum_{k=k_0}^{\infty} |b_k| \\ &= b_0 + \sum_{k=k_0}^{\infty} q^{k-k_0} \cdot |a_{k_0}| \\ &= b_0 + |a_{k_0}| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k \end{aligned}$$

für $0 < q < 1$ konvergent ist.

(2) $\exists k_0 \in \mathbb{N} : |a_{k+1}| \geq |a_k| \ \forall k \geq k_0$
$\Rightarrow |a_k| \geq |a_{k_0}| \ \forall k \geq k_0$.
Wählen wir $k_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|a_{k_0}| > 0$ gilt, so sieht man, dass $(|a_k|)$ keine Nullfolge ist, und damit ist $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ divergent.

□

Beispiel 9.36.

(1) Sei $\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$.

Wir wenden das Quotientenkriterium an, um die absolute Konvergenz von $\exp(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ nachzuweisen.
Für alle $k \geq 2 \cdot |x|$ gilt:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}}\right| = \frac{|x|}{(k+1)} < \frac{1}{2} < 1$$

$\overset{\text{Satz } 9.35}{\Rightarrow}$ $\exp(x)$ ist absolut konvergent $\forall x \in \mathbb{R}$.

(2) Sei $\cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, $x \in \mathbb{R}$. Anwendung des Quotientenkriteriums: Für alle $k \geq |x|$ gilt:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(-1)^{k+1}\frac{x^{2(k+1)}}{(2(k+1))!}}{(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}}\right| = \frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} < \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow \cos(x)$ ist absolut konvergent $\forall x \in \mathbb{R}$.

(3) Sei $\sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$.
Anwendung des Quotientenkriteriums: Für alle $k > |x|$ gilt:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(-1)^{k+1}\frac{x^{2(k+1)+1}}{(2(k+1)+1)!}}{(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}\right| = \frac{x^2}{(2k+2)(2k+3)} < \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow \sin(x)$ ist absolut konvergent $\forall x \in \mathbb{R}$.

Den folgenden Satz, mit Hilfe dessen wir die Zusammenhänge zwischen den Reihen aus Beispiel 9.36 analysieren werden, beweisen wir aus Zeitgründen nicht.

Satz 9.37. *Cauchy-Produkt von Reihen.*
Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergente Reihen und sei

$$c_n := \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} \cdot b_k) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_n = (\sum_{k=0}^{\infty} a_k) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} b_k).$$

Satz 9.38. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

(2) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

(3) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

Beweis.

(1) $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ und $\exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad c_n &:= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{y^k}{k!} \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k \\ &= \frac{1}{n!} \cdot (x+y)^n \end{aligned}$$

$$\left[\text{Binomialkoeffizienten: } \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n,k \in \mathbb{N}\right]$$

$\overset{\text{Satz } 9.37}{\Rightarrow} \exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \exp(x) \cdot \exp(y).$

(2) und (3) beweist man analog (Übung).

□

Korollar 9.39.

(1) $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\sin(-x) = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$

(3) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(4) $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$ und
$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2}) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}.$

Beweis.

(1) und (2) folgen unmittelbar aus der Definition von $\cos(x)$ und $\sin(x)$.

(3) Setze $y := -x$ in Satz 9.38 (2)

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \cos(x-x) = \cos(x)\cos(-x) - \sin(x)\sin(-x) \\ &\Rightarrow \quad 1 = \cos^2(x) + \sin^2(x). \end{aligned}$$

(4) Setze $u := \frac{x+y}{2}$ und $v := \frac{x-y}{2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad & \sin(x) - \sin(y) \\ = \qquad & \sin(u+v) - \sin(u-v) \\ \overset{\text{Satz } 9.38(2)}{=} \qquad & \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v) \\ & - [\sin(u)\cos(-v) + \cos(u)\sin(-v)] \\ = \qquad & 2\cos(u)\sin(v) = 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2}) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Die zweite Formel folgt analog.

□

Kapitel 10

Stetige Funktionen

Definition 10.1. (vgl. Definition 1.30) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt die Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ *reellwertige Funktion* mit *Definitionsbereich* $D_f = D$ und *Wertebereich* (*Bildbereich*) $W_f = f(D) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in D\}$.

Beispiel 10.2.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = c \; \forall x \in \mathbb{R}$ mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$: *konstante Funktion*

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax + b \; \forall x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$: *lineare Funktion*

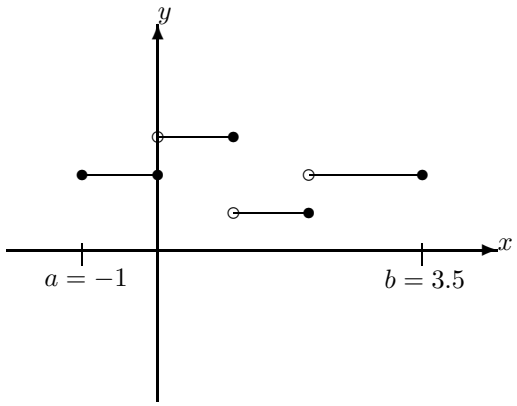
(3) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$: *Exponentialfunktion*
$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\cos(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$: *Cosinusfunktion*
$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\sin(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$: *Sinusfunktion*
(vgl. Beispiel 9.36)

(4) $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit Konstanten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$: *Polynomfunktion*

(5) Seien $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ und $q(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i x^i$ Polynomfunktionen und $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$. Dann ist $r : D \to \mathbb{R}$ mit $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine *rationale Funktion*

(6) Seien $a < b$ reelle Zahlen und sei $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
Wenn es eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ von $[a, b]$ gibt, und wenn es Konstanten $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\varphi(x) = c_k \; \forall x \in (t_{k-1}, t_k], 1 \leq k \leq n$, heißt φ *Treppenfunktion*.
Beispiel: $f : [-1, 3.5] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} 1 & , x \in [-1, 0] \\ 1.5 & , x \in (0, 1] \\ 0.5 & , x \in (1, 2] \\ 1 & , x \in (2, 3.5] \end{cases}$$



(7) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist eine Funktion, die sogenannte *Dirichlet'sche Sprungfunktion*.

Korollar 10.3. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

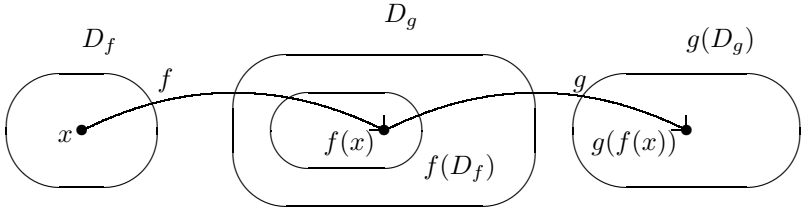
(1) $f + g : D \to \mathbb{R}$ mit $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ ist eine Funktion.

(2) $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ mit $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ ist eine Funktion.

(3) $\lambda f : D \to \mathbb{R}$ mit $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$ ist eine Funktion.

(4) Ist $D' := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$, so ist $\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$ mit $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ eine Funktion.

Definition 10.4. (vgl. Definition 1.37)
Seien $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D_f) \subseteq D_g$.
Dann heißt $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$ mit $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ die *Verknüpfung* (*Hintereinanderausführung*, *Komposition*) von f und g.



Beispiel 10.5. Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 3$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x + 5$.

(1) $(f + g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = 2x^2 + 3x + 8$

(2) $(f \cdot g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = 6x^3 + 10x^2 + 9x + 15$

(3) $(2 \cdot f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(2 \cdot f)(x) = 4x^2 + 6$

(4) $(\frac{f}{g}) : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{3}\} \to \mathbb{R}$, $(\frac{f}{g})(x) = \frac{2x^2+3}{3x+5}$

(5) $(f \circ g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(3x + 5) = 2(3x + 5)^2 + 3 \\ &= 2(9x^2 + 30x + 25) + 3 = 18x^2 + 60x + 53\end{aligned}$$

(6) $(g \circ f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x^2 + 3) = 3(2x^2 + 3) + 5 = 6x^2 + 14$$

Bemerkung. Im Allgemeinen gilt nicht: $f \circ g = g \circ f$. $g \circ f$ muß noch nicht einmal definiert sein wenn $f \circ g$ definiert ist, und umgekehrt.

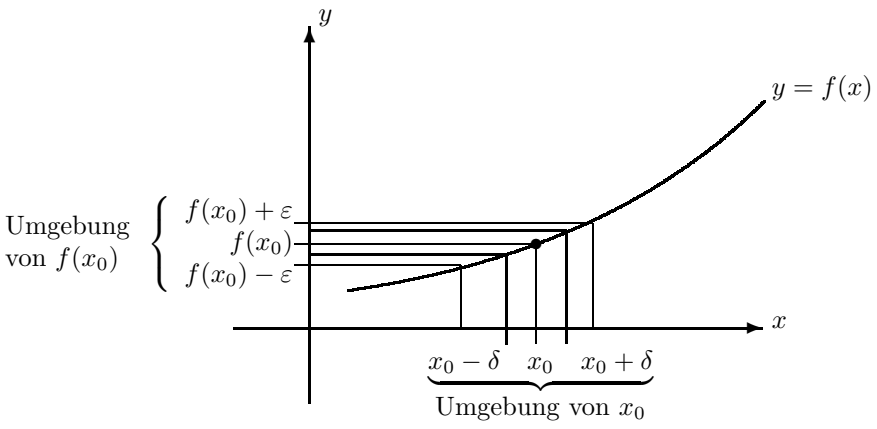
10.1 Stetigkeit

Definition 10.6. Eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_0 \in D_f$ *umgebungsstetig*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D_f$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Kurz:

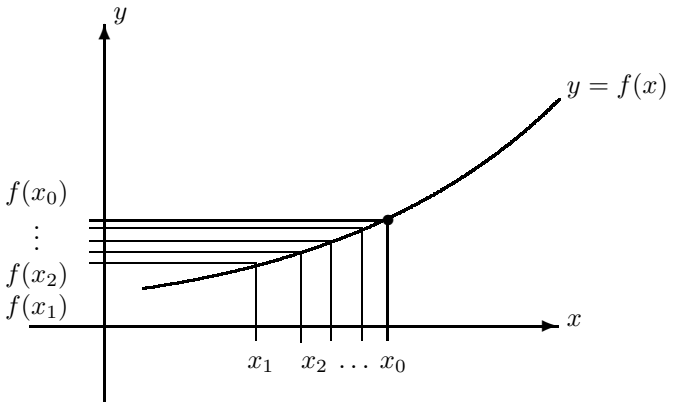
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \, \forall x \in D_f, |x - x_0| < \delta(\varepsilon).$$



Alternativ zu der Formulierung in Definition 10.6 kann man Stetigkeit auch mit Hilfe von Folgen definieren. Wir geben zunächst diese alternative Definition an und zeigen dann die Äquivalenz zur ersten Definition 10.6.

Definition 10.7. Eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_0 \in D_f$ *folgenstetig*, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n \in D_f \forall n \geq 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$



Anschauung: Der Funktionsgraph von einer in jedem Punkt eines Intervalls $[a, b]$ stetigen Funktion läßt sich in einem Zug zeichnen, d.h., ohne dabei den Stift vom Blatt zu heben.

Satz 10.8. Eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ ist an der Stelle $x_0 \in D_f$ genau dann umgebungsstetig, wenn sie dort folgenstetig ist.

Beweis.

(1) f umgebungsstetig in $x_0 \Rightarrow f$ folgenstetig in x_0:
Sei f umgebungsstetig in x_0
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\, \forall x \in D_f$ mit $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$.
Sei nun $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in D_f mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, und sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben.
Wähle $\delta := \delta(\varepsilon)$ so, dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\, \forall x \in D_f$, $|x - x_0| < \delta$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \;\Rightarrow\; \exists n_0(\delta) : |x_n - x_0| < \delta\, \forall n \geq n_0(\delta)$
$\overset{f \text{ umgebungsstetig}}{\Longrightarrow} |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon\, \forall n \geq n_0(\delta)$.

Zusammenfassung:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 = n_0(\delta) \in \mathbb{N} :\; |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon\, \forall n \geq n_0$$

$\Rightarrow (f(x_n))_{n\geq 1}$ ist konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

(2) f folgenstetig in $x_0 \Rightarrow f$ umgebungsstetig in x_0:
Annahme: f ist *nicht* umgebungsstetig in x_0.
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x(\delta) =: x \in D_f$ mit $|x - x_0| < \delta$ und $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$
Ziel: Konstruiere eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in D_f mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \text{ aber } \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0).$$

Sei $\varepsilon > 0$ wie oben gewählt und sei $\delta_1 > 0$ beliebig.
Setze $x_1 := x(\delta_1)$

$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_0)| \geq \varepsilon \text{ und } x_1 \neq x_0$$

Setze $\delta_2 := \min\{|x_1 - x_0|, \frac{\delta_1}{2}\} > 0$ und $x_2 := x(\delta_2)$

$$\Rightarrow |f(x_2) - f(x_0)| \geq \varepsilon \text{ und } x_2 \neq x_0$$

$\vdots$

Setze $\delta_n := \min\{|x_{n-1} - x_0|, \frac{\delta_{n-1}}{2}\} > 0$ und $x_n := x(\delta_n)$

$$\Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon \text{ und } x_n \neq x_0$$

Damit gilt $\delta_n \leq \frac{\delta_1}{2^{n-1}} \quad \forall n \geq 2$.

Ergebnis: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, aber $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon > 0 \, \forall n \geq 1$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$
$\Rightarrow f$ ist nicht folgenstetig in x_0 im Widerspruch zur Voraussetzung.

□

Definition 10.9. Eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt in $x_0 \in D_f$ *stetig*, wenn sie in x_0 umgebungsstetig (bzw. folgenstetig) ist.
f heißt *stetig* auf einer Teilmenge $B \subseteq D_f$, wenn f an jeder Stelle $x_0 \in B$ stetig ist.

Beispiel 10.10. (vgl. Beispiel 10.2)

(1) Konstante Funktionen sind stetig auf $\mathbb{R}$, denn:
Sei $c \in \mathbb{R}$, $f(x) = c \, \forall x \in \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.
Dann gilt:

$$f(x_n) = c \quad \forall n \geq 1 \text{ und } f(x_0) = c$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c = f(x_0) \Rightarrow f$ ist folgenstetig für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

(2) Lineare Funktionen sind stetig auf $\mathbb{R}$, denn:
Sei $f(x) = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Dann gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) := \tfrac{\varepsilon}{|a|} > 0 :$$
$$|f(x) - f(x_0)| = |ax + b - (ax_0 + b)| = |a| \, |x - x_0| < \varepsilon$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

$\Rightarrow f$ ist umgebungsstetig für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

(3) Die Exponentialfunktion ist stetig auf $\mathbb{R}$, denn: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.
Zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n) = \exp(x_0)$.

Behauptung:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + r_{N+1}(x), \quad N \geq 0$$

mit

$$|r_{N+1}(x)| \leq \frac{2 \cdot |x|^{N+1}}{(N+1)!} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| \leq 1 + \frac{N}{2}$$

Beweis. Setze $r_{N+1}(x) := \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & |r_{N+1}(x)| \\
\leq \quad & \sum_{k=N+1}^{\infty} \left|\frac{x^k}{k!}\right| = \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \left(1 + \frac{|x|}{N+2} + \frac{|x^2|}{(N+2)(N+3)} + \dots\right) \\
\leq \quad & \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \left(1 + \frac{|x|}{N+2} + \left(\frac{|x|}{(N+2)}\right)^2 + \dots\right) \\
= \quad & \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|x|}{N+2}\right)^k}_{\text{geometrische Reihe!}},
\end{aligned}$$

und mit $\frac{|x|}{N+2} \overset{|x| \leq 1+\frac{N}{2}}{\leq} \frac{1+\frac{N}{2}}{N+2} = \frac{2+N}{2(N+2)} = \frac{1}{2}$ folgt:

$$\begin{aligned}
|r_{N+1}(x)| \quad &\leq \quad \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k}_{= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{(Beispiel 9.23(1))}} \\
&= \quad \frac{2 \cdot |x|^{N+1}}{(N+1)!} \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

Außerdem gilt: $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n - x_0) = 0$

$\Rightarrow$ Für $|x| \leq 1$ gilt: $\exp(x) = \frac{x^0}{0!} + r_1(x) = 1 + r_1(x) \leq 1 + 2\,|x|$

$\Rightarrow |\exp(x) - 1| = |r_1(x)| \leq 2 \cdot |x|$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |\exp(x_n - x_0) - 1| \leq \lim_{n\to\infty} 2 \cdot |x_n - x_0| = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \exp(x_n - x_0) = 1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \exp(x_n) \quad &= \quad \lim_{n\to\infty} (\exp(x_0) \cdot \exp(x_n - x_0)) \\
&= \quad \exp(x_0) \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \exp(x_n - x_0)}_{=1} = \exp(x_0) \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

□

Ganz ähnlich kann man zeigen, dass auch die Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$ sind.

(6) Treppenfunktionen sind *unstetig* (nicht stetig) an jeder Stufe t_k mit $c_k \neq c_{k+1}$, denn es gilt:

$$f(t_k) = c_k \text{ und } f(t_k + \delta) = c_{k+1} \quad \forall 0 < \delta < t_{k+1} - t_k$$
$$\Rightarrow \exists \varepsilon := \tfrac{1}{2} |c_{k+1} - c_k| \ \forall \delta > 0 \ \exists x(\delta) := t_k + \min\{\tfrac{\delta}{2}, \tfrac{t_{k+1}-t_k}{2}\} :$$
$$|f(x(\delta)) - f(t_k)| > \varepsilon.$$

(7) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist nirgendwo stetig, denn

(a) für jedes $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gibt es eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n \in \mathbb{Q}$, $n \geq 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, so dass gilt: $f(x_n) = 1 \, \forall n \geq 1$ und $f(x_0) = 0$.

(b) für jedes $x_0 \in \mathbb{Q}$ gibt es eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, so dass gilt: $f(x_n) = 0 \, \forall n \geq 1$ und $f(x_0) = 1$.

Um für die Beispiele 10.2 (4) und (5) Stetigkeit nachzuweisen, ist der folgende Satz hilfreich:

Satz 10.11. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in $x_0 \in D$ stetig sind und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g$, $f \cdot g$ und $\lambda \cdot f$ stetig in x_0. Gilt außerdem $g(x_0) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$ mit $D' = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ stetig in x_0.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Folgenstetigkeit und den entsprechenden Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen (Satz 9.16, Korollar 9.17 und Satz 9.18). □

Korollar 10.12. Alle rationalen Funktionen sind stetig.

Satz 10.13. Seien $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$ mit $f(D_f) \subseteq D_g$. Außerdem sei f in $a \in D_f$ stetig und g in $b = f(a) \in D_g$. Dann ist auch $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$ in $a \in D_f$ stetig.

Beweis. Sei (a_n) eine Folge in D_f (d.h. $a_n \in D_f \, \forall n \in \mathbb{N}$) mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

$$\overset{f \text{ stetig in } a}{\Rightarrow} \quad \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a) = b \in D_g$$

Setze $b_n := f(a_n) \, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = f(a) = b$$
$$\overset{g \text{ stetig in } b}{\Rightarrow} \quad \lim_{n\to\infty} g(b_n) = g(b)$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (g \circ f)(a_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(a_n)) = \lim_{n\to\infty} g(b_n)$$
$$= g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a).$$

□

Funktionen, die an einzelnen Stellen $x_0 \in \mathbb{R}$ nicht definiert sind, lassen sich unter bestimmten Umständen dort *stetig fortsetzen*:

Definition 10.14. Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in D_f (d.h., $x_n \in D_f \; \forall n \geq 1$) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \notin D_f$.
Dann heißt f an der Stelle x_0 *stetig fortsetzbar*, wenn $f(x_0)$ so definiert werden kann, dass damit f an der Stelle x_0 stetig ist.

Beispiel 10.15. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht definiert. Für jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ gilt jedoch:

$$f(x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x_n^{2k}}{(2k+1)!} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$$

$\Rightarrow f$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ stetig fortsetzbar und zwar durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

10.2 Gleichmäßige Stetigkeit und der Satz vom Maximum

Definition 10.16. Eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig* auf $B \subseteq D_f$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ für alle $x', x'' \in B$ mit $|x' - x''| \leq \delta$ gilt.
Kurz:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \; |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \; \forall x', x'' \in B, |x' - x''| < \delta(\varepsilon).$$

Bemerkung. Im Unterschied zur Definition der Umgebungsstetigkeit (Definition 10.6) muss jetzt das $\delta(\varepsilon)$ *unabhängig* von $x_0 \in B$ gewählt werden können!

Korollar 10.17. Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig auf $B \subseteq D_f$. Dann ist f auch stetig auf B.

Die umgekehrte Richtung ist nicht für alle Funktionen richtig:

Beispiel 10.18. Sei $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.
Dann ist f an jeder Stelle $x_0 \in (0, 1]$ umgebungsstetig, denn es gilt für festes $x_0 \in (0, 1]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) = \min\left\{\tfrac{\varepsilon}{2} x_0^2, \tfrac{x_0}{2}\right\} :$$

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{x_0}\right| = \left|\tfrac{x_0 - x}{x x_0}\right| < \frac{\frac{\varepsilon}{2} x_0^2}{\frac{x_0^2}{2}} = \varepsilon$$

$$\forall x \in (0, 1], |x - x_0| < \delta(\varepsilon).$$

$\Rightarrow f$ ist auf $(0, 1]$ stetig.

Aber: f ist auf $(0,1]$ *nicht* gleichmäßig stetig, da in der obigen Abschätzung das $\delta(\varepsilon)$ in Abhängigkeit von x_0 gewählt werden muss. Formal zeigt man:
Sei $\varepsilon > 0$, z.B. $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Dann gilt:

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x', x'' \in (0,1] : |x' - x''| \leq \frac{\delta}{2} < \delta \text{ und } \left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| \geq \underbrace{2\varepsilon}_{=1} > \varepsilon.$$

Bestimmung solcher $x', x'' \in (0,1]$ für $\delta \leq 2$:
Setze

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & x' - x'' \overset{!}{=} \frac{\delta}{2} \\ (2) & \frac{1}{x''} - \frac{1}{x'} \overset{!}{=} 2\varepsilon = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} \Rightarrow & (x'')^2 + \frac{\delta}{2}x'' - \frac{\delta}{4\varepsilon} = 0 \\ \Rightarrow & (x''_{1,2}) = -\frac{\delta}{4} \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{16} + \frac{\delta}{2}} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \text{Setze } x'' := -\frac{\delta}{4} + \underbrace{\sqrt{\frac{\delta^2}{16} + \frac{\delta}{2}}}_{> \frac{\delta}{4}} > 0 \Rightarrow x' := x'' + \frac{\delta}{2} > 0.$$

Unter bestimmten Voraussetzungen an f und insbesondere an die betrachtete Teilmenge $B \subseteq D_f$ gilt aber auch die Umkehrung von Korollar 10.17:

Satz 10.19. Seien $a < b$ reelle Zahlen und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$. Dann ist f auch gleichmäßig stetig auf $[a,b]$.

Beweis. Annahme: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $[a,b]$, aber *nicht* gleichmäßig stetig.
Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass zu jedem $\delta(n) := \frac{1}{n}$ mit $n \geq 1$ zwei Punkte $x'_n, x''_n \in [a,b]$ existieren mit

$$|x'_n - x''_n| \leq \delta(n) = \frac{1}{n} \text{ und } |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$$

$\Rightarrow (x'_n)_{n \geq 1}$ ist eine Folge in $[a,b]$, die beschränkt ist ($a \leq x'_n \leq b \, \forall n \geq 1$).
$\overset{\text{Satz } 9.14}{\Rightarrow}$ (x'_n) hat eine konvergente Teilfolge (x'_{n_k}) und es gilt:

$$\lim_{k \to \infty} x'_{n_k} =: x_0 \in [a,b].$$

Wegen $\left|x'_{n_k} - x''_{n_k}\right| \leq \frac{1}{n_k}$ ist dann auch (x''_{n_k}) konvergent mit $\lim\limits_{k \to \infty} x''_{n_k} = x_0$

$$\overset{f \text{ stetig in } x_0}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{rcl} \lim\limits_{k \to \infty} (f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})) & = & \lim\limits_{k \to \infty} f(x'_{n_k}) - \lim\limits_{k \to \infty} f(x''_{n_k}) \\ & = & f(x_0) - f(x_0) \\ & = & 0, \end{array}$$

im Widerspruch zu

$$\left|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})\right| \geq \varepsilon \quad \forall n_k.$$

□

Definition 10.20. *Extremwerte von Funktionen.*
Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D_f$.

(1) $(x_0, f(x_0))$ heißt *absolutes* (oder *globales*) *Maximum* (bzw. *absolutes* (oder *globales*) *Minimum*) von f, wenn gilt:

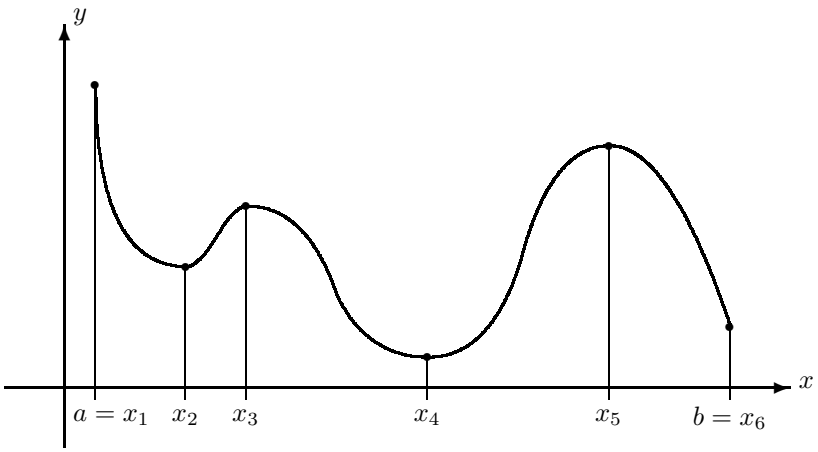
$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D_f \qquad (\text{bzw. } f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in D_f).$$

(2) $(x_0, f(x_0))$ heißt *relatives* (oder *lokales*) *Maximum* (bzw. *relatives* (oder *lokales*) *Minimum*) von f, wenn in einer Umgebung

$$N_\varepsilon(x_0) = \{x \in D_f : |x - x_0| < \varepsilon\} \text{ mit } \varepsilon > 0$$

gilt:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in N_\varepsilon(x_0) \qquad (\text{bzw. } f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in N_\varepsilon(x_0)).$$



- x_1, x_3, x_5: relative Maxima; x_1: absolutes Maximum
- x_2, x_4, x_6: relative Minima; x_4: absolutes Minimum.

Satz 10.21. *vom Maximum stetiger Funktionen.*
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
Dann nimmt f auf $[a, b]$ ihr absolutes Maximum und ihr absolutes Minimum an, d.h. es gibt $x_{\max} \in [a, b]$ und $x_{\min} \in [a, b]$, so dass

$$f(x_{\max}) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \quad \text{und} \quad f(x_{\min}) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Bemerkung.

(1) Außerdem ist f im obigen Fall *beschränkt*, d.h.

$$\exists C \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq C \quad \forall x \in [a, b],$$

zum Beispiel durch $C := f(x_{\max})$.

(2) Ist $f : D_f \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $D_f \neq [a, b]$, so gilt die Aussage von Satz 10.21 nicht unbedingt, vergleiche Beispiel 10.18.

Beweis von Satz 10.21:
Wir zeigen die Behauptung für das Maximum, für das Minimum folgt sie analog. Sei $W_f = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in [a, b]\}$ der Wertebereich von f, und sei $M := \sup(W_f)$. (Falls W_f nach oben nicht beschränkt ist, setzen wir $\sup(W_f) = \infty$ und passen die Argumentation entsprechend an).

$\Rightarrow$ M ist kleinste obere Schranke von W_f.

$\Rightarrow \forall n \geq 1\ \exists y_n = f(x_n) \in W_f :\ |M - y_n| \leq \frac{1}{n}$

$\Rightarrow$ $(y_n)_{n\geq 1}$ ist eine Folge in W_f mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = M$, und $(x_n)_{n\geq 1}$ ist eine beschränkte Folge in $[a,b]$, die nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 9.14) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) besitzt.

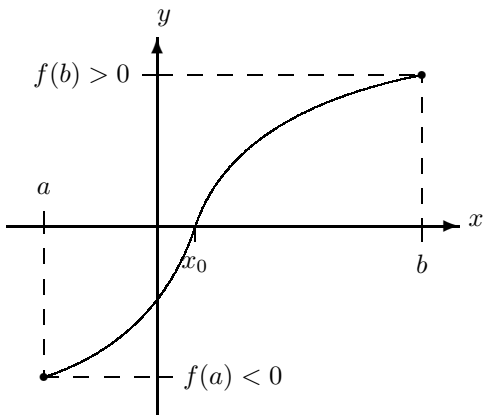
Setze $x_0 := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$.

$$\left.\begin{array}{ll} \overset{f \text{ stetig in } [a,b]}{\Rightarrow} & \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) \\ \overset{(y_n) \text{ konvergent}}{\Rightarrow} & \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = M \end{array}\right\} \Rightarrow M = f(x_0).$$

□

10.3 Der Zwischenwertsatz

Satz 10.22. *Nullstellensatz von Bolzano.*
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$
(bzw. $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$).
Dann existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = 0$, d.h. f besitzt in dem Intervall $[a,b]$ mindestens eine *Nullstelle*.



Beweis. Sei $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$.
Wir konstruieren induktiv eine Folge von Intervallen $[a_n, b_n] \subseteq [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, mit folgenden Eigenschaften:

(1) $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}] \quad \forall n \geq 1$

(2) $b_n - a_n = 2^{-n}(b-a) \quad \forall n \geq 0$

(3) $f(a_n) \leq 0,\ f(b_n) \geq 0 \quad \forall n \geq 0.$

Setze $[a_0, b_0] := [a,b]$ und sei $[a_n, b_n]$ bis zu einem $n \in \mathbb{N}$ schon konstruiert.
Setze $M := \frac{a_n + b_n}{2}$ und

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [a_n, M] & \text{falls} \quad f(M) \geq 0 \\ [M, b_n] & \text{falls} \quad f(M) < 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Auch für das Intervall $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ sind die Eigenschaften (1),(2) und (3) wieder erfüllt.

$\Rightarrow$ $\begin{cases} (a_n) & \text{ist eine monoton wachsende, beschränkte Folge,} \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n =: x_a, \\ (b_n) & \text{ist eine monoton fallende, beschränkte Folge,} \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n =: x_b, \end{cases}$

und wegen (2) folgt: $x_a = x_b =: x_0$

$\overset{f \text{ stetig in } [a,b]}{\Rightarrow}$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$ mit $f(a_n) < 0$ und $f(b_n) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $f(x_0) \leq 0$ und $f(x_0) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = 0.$

□

Beispiel 10.23.

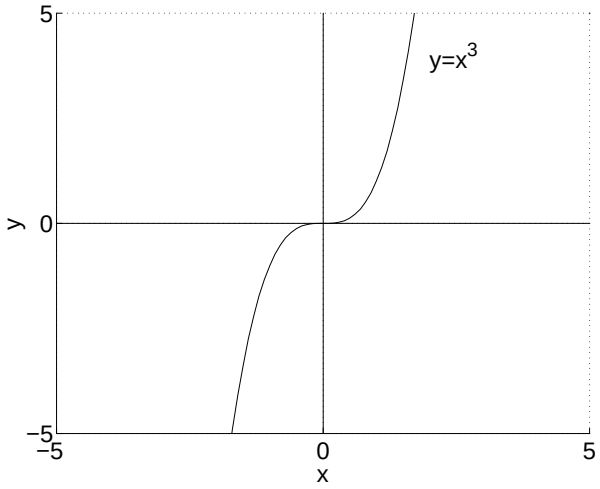
(1) Jedes Polynom ungeraden Grades $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = \sum_{n=0}^{2N+1} a_n x^n, \quad N \in \mathbb{N},$$

besitzt mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$, denn:

Fall 1: $a_{2N+1} > 0$:
$\Rightarrow \exists a < 0 : p(a) < 0$ und $\exists b > 0 : p(b) > 0$
$\overset{\text{Satz } 10.22}{\Rightarrow}$ $p(x)$ hat eine Nullstelle in $[a, b]$.

Fall 2: $a_{2N+1} < 0$: Analog.



(2) Die Funktion

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

hat im Intervall $[0, 2]$ eine Nullstelle, denn:

(a) $\cos(0) = 1 > 0$

(b) **Behauptung:** $\cos(2) \leq -\frac{1}{3} < 0$

Beweis. Es gilt:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2N+2}(x)$$

mit $|r_{2N+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2N+2}}{(2N+2)!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 2N+3$.
Beweis: Analog zur Abschätzung für $\exp(x)$, vgl. Beispiel 10.10(3).

$\overset{N=1}{\Rightarrow}$ $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + r_4(x)$ mit $|r_4(x)| \leq \frac{|x|^4}{24}$ für $|x| \leq 5$

$\overset{x=2}{\Rightarrow}$ $\cos(2) = 1 - 2 + r_4(2)$ mit $|r_4(2)| \leq \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \cos(2) \leq 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$

$\overset{\text{Satz } 10.22}{\Rightarrow}$ $\cos(x)$ hat eine Nullstelle in $[0, 2]$.

Bemerkung. Man kann relativ leicht zeigen, dass $\cos(x)$ nur genau eine Nullstelle in $[0, 2]$ hat. Diese Nullstelle bezeichnen wir mit $x_0 =: \frac{\pi}{2}$.

Korollar 10.24. Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt:

(1) $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ [denn: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \; \forall x \in \mathbb{R}$]

(2) (a) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x) \underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{=0} + \cos(x) \underbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}_{=1} = \cos(x)$

(b) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x) \underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{=0} - \sin(x) \underbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}_{=1} = -\sin(x)$

(3) (a)
$$\begin{aligned} \sin(x+\pi) &= \sin((x+\tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{\pi}{2}) \\ &= \sin(x+\tfrac{\pi}{2}) \underbrace{\cos(\tfrac{\pi}{2})}_{=0} + \underbrace{\cos(x+\tfrac{\pi}{2})}_{=-\sin(x)} \underbrace{\sin(\tfrac{\pi}{2})}_{=1} \\ &= -\sin(x) \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \cos(x+\pi) &= \cos((x+\tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{\pi}{2}) \\ &= \cos(x+\tfrac{\pi}{2}) \underbrace{\cos(\tfrac{\pi}{2})}_{=0} - \underbrace{\sin(x+\tfrac{\pi}{2})}_{=\cos(x)} \underbrace{\sin(\tfrac{\pi}{2})}_{=1} \\ &= -\cos(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$
$$\begin{aligned} \sin(\pi) &= \sin(0+\pi) = -\sin(0) = 0, \\ \cos(\pi) &= \cos(0+\pi) = -\cos(0) = -1 \end{aligned}$$

(4) (a)
$$\begin{aligned} \sin(x+2\pi) &= \sin((x+\pi)+\pi) \\ &= \underbrace{\sin(x+\pi)}_{=-\sin(x)} \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \cos(x+\pi) \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} \\ &= \sin(x) \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \cos(x+2\pi) &= \cos((x+\pi)+\pi) \\ &= \underbrace{\cos(x+\pi)}_{=-\cos(x)} \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} - \sin(x+\pi) \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

(5) (a) $\{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = 0\} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

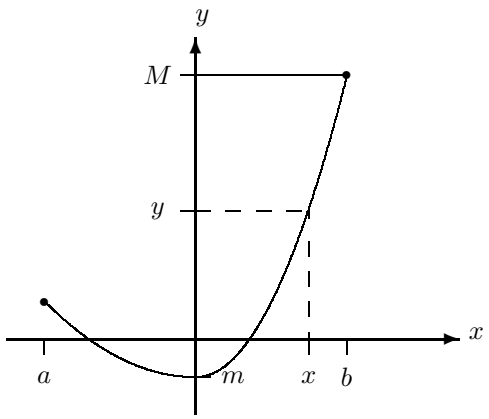
(b) $\{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π	$\cdots$
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0	1	0	$\cdots$
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1	0	-1	$\cdots$

Satz 10.22 wollen wir im Folgenden noch verallgemeinern:

Satz 10.25. *Zwischenwertsatz von Bolzano.*
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und sei $m := \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$ und $M := \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$.
Dann nimmt f alle Werte aus $[m, M]$ mindestens einmal an, d.h.

$$\forall y \in [m, M] \quad \exists x \in [a, b] : \ f(x) = y.$$



Beweis. Satz 10.21:

$$\begin{aligned} &\exists x_{\min} \in [a, b] : \quad f(x_{\min}) = m \\ &\exists x_{\max} \in [a, b] : \quad f(x_{\max}) = M \end{aligned}$$

Sei $y \in [m, M]$ beliebig und setze $g(x) := f(x) - y \ \forall x \in [a, b]$.
$\Rightarrow g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig auf $[a, b]$.

Fall 1: $x_{\min} \leq x_{\max}$:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \ g(x_{\min}) = m - y \leq 0 \text{ und } g(x_{\max}) = M - y \geq 0 \\ &\overset{\text{Satz } 10.22}{\Rightarrow} \ g \text{ hat mindestens eine Nullstelle } x_0 \text{ in } [x_{\min}, x_{\max}] \\ &\Rightarrow \ g(x_0) = f(x_0) - y = 0 \\ &\Rightarrow \ f(x_0) = y. \end{aligned}$$

Fall 2: $x_{\min} > x_{\max}$: Analog.

□

10.4 Monotone Funktionen

Definition 10.26. (vgl. Definition 9.3 für Folgen)
Eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt auf einer Teilmenge $B \subseteq D_f$

(1) (*schwach*) (*monoton*) *wachsend*, wenn

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$

(2) *stark* (oder *streng*) *monoton wachsend*, wenn

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

(3) (*schwach*) (*monoton*) *fallend*, wenn

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$$

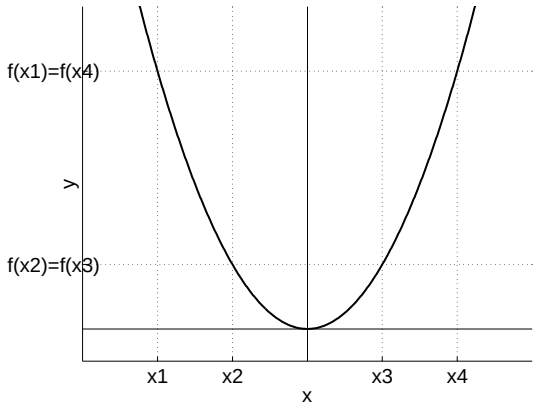
(4) *stark* (oder *streng*) *monoton fallend*, wenn

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

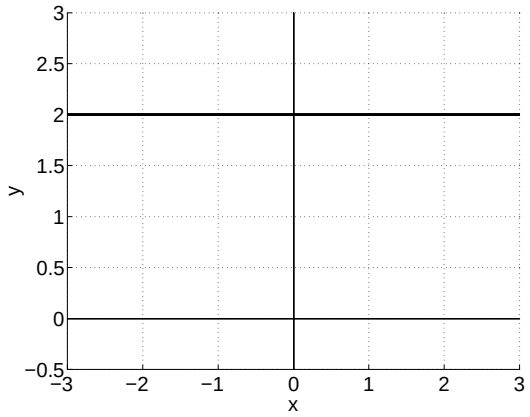
Beispiel 10.27.

(1) $f(x) = x^2$ ist

- streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$, und
- streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$.



(2) $f(x) = 2$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ sowohl wachsend als auch fallend, aber weder streng monoton wachsend noch streng monoton fallend.



Beobachtung: Vor einem relativen Minimum ist eine Funktion fallend, danach steigend. Bei einem relativen Maximum ist die Situation genau umgekehrt.

Satz 10.28. Ist $f : D_f \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (oder fallend) auf D_f, so ist f injektiv (vgl. Definition 1.32), d.h.,
für alle $y_0 \in W_f = f(D_f)$ existiert genau ein $x_0 \in D_f$ mit $f(x_0) = y_0$.

Beweis. Ist $f(x_1) = f(x_2)$, so folgt aus der strengen Monotonie $x_1 = x_2$. □

Korollar 10.29. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und monoton wachsend (bzw. fallend) in $[a, b]$, so nimmt f jeden Wert aus $[f(a), f(b)]$ (bzw. $[f(b), f(a)]$) genau einmal an.
Die Abbildung $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ (bzw. $f : [a, b] \to [f(b), f(a)]$) ist also bijektiv, d.h. sowohl injektiv als auch surjektiv.

Beweis. Wegen der Monotonie ist f injektiv und

$$\begin{array}{rcccl} m & = & \min\{f(x) : x \in [a, b]\} & = & f(a), \\ M & = & \max\{f(x) : x \in [a, b]\} & = & f(b) \quad \text{(für wachsendes } f\text{)}. \end{array}$$

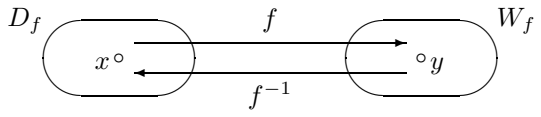
Nach dem Zwischenwertsatz (Satz 10.25) ist dann $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ surjektiv, d.h. für alle $y_0 \in [f(a), f(b)]$ existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$.
□

Korollar 10.30. Ist $f : D_f \to W_f = f(D_f)$ streng monoton wachsend (bzw. fallend) auf D_f, so ist f bijektiv.

Korollar 10.31. (vgl. Definition 1.34)
Zu jeder streng monoton wachsenden (bzw. fallenden) Funktion $f : D_f \to W_f$ existiert eine *Umkehrfunktion*

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{rcl} W_f & \to & D_f \\ y & \to & f^{-1}(y), \end{array} \right.$$

wobei $f^{-1}(y)$ das eindeutige Element $x \in D_f$ ist mit $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$.



Satz 10.32. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und streng monoton wachsende (bzw. fallende) Funktion und $f(a) = A$, $f(b) = B$. Dann bildet f das Intervall $[a,b]$ bijektiv auf das Intervall $[A,B]$ (bzw $[B,A]$) ab, und die Umkehrfunktion $f^{-1} : [A,B] \to [a,b]$ (bzw. $f^{-1} : [B,A] \to [a,b]$) ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Beweis. Sei oBdA f streng monoton wachsend.
Dann folgen Bijektivität von f und die Existenz der Umkehrfunktion aus Korollar 10.29 und Korollar 10.31.
Behauptung 1: f^{-1} ist ebenfalls streng monoton wachsend.

Beweis. Seien $y_1, y_2 \in [A,B]$, $f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2)$

$$\Rightarrow f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2) \qquad \checkmark$$

Behauptung 2: f^{-1} ist ebenfalls stetig.

Beweis. Sei $y_0 \in [A,B]$ und $(y_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $[A,B]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.
Zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y_0)$.
Setze $x_n := f^{-1}(y_n) \quad \forall n \geq 1$ und $x_0 := f^{-1}(y_0)$.
$\Rightarrow (x_n)_{n\geq 1}$ ist eine Folge in $[a,b]$, die beschränkt ist.
$\overset{\text{Satz } 9.14}{\Rightarrow}$ $(x_n)_{n\geq 1}$ hat eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = c \in [a,b]$
$\overset{f \text{ stetig}}{\Rightarrow} f(c) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.
$\overset{f \text{ injektiv}}{\Rightarrow} c = x_0$. $\qquad \checkmark$

□

Beispiel 10.33. (vgl. Beispiel 1.38)
$f(x) = x^2$ ist auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend und auf $[0,\infty)$ streng monoton wachsend. Also gilt

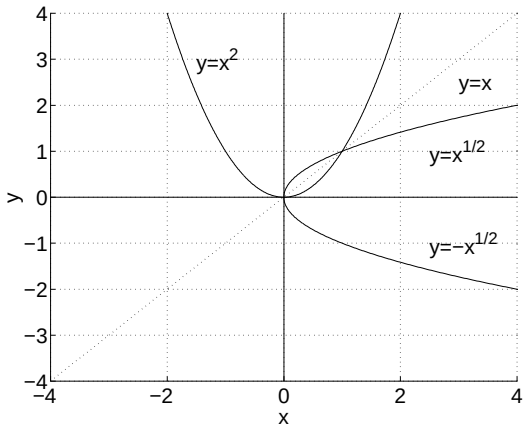
(1) $f : (-\infty, 0] \to [0,\infty)$, $f(x) = x^2$ hat die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [0,\infty) \to (-\infty, 0] \text{ mit } f^{-1}(x) = -\sqrt{x}.$$

(2) $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = x^2$ hat die Umkehrfunktion

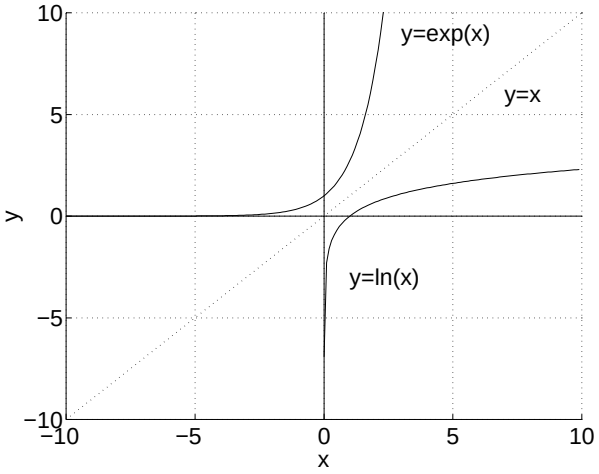
$$f^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty) \text{ mit } f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Graphisch ergibt sich der Funktionsgraph f^{-1} durch Spiegelung des Funktionsgraphen von f an der Geraden $y = x$ (Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten des Koordinatensystems).



Satz 10.34. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ist streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ ab.
Die Umkehrfunktion $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und heißt *natürlicher Logarithmus*. Es gilt:

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+.$$



Beweis.
Behauptung 1: $\exp(x)$ ist streng monoton wachsend.

Beweis. Für $x > 0$ ist $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^0}{0!} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{x^k}{k!}}_{>0} > 1.$

Sei nun $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 - x_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \exp(x_2 - x_1) > 1$
$\Rightarrow \exp(x_2) = \exp(x_1 + x_2 - x_1) = \exp(x_1) \cdot \underbrace{\exp(x_2 - x_1)}_{>1} > \exp(x_1)$ ✓

Behauptung 2: $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ist bijektiv.

Beweis. $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:
$\exp(n) \geq 1 + n$ (vgl. Beispiel 10.10(3)) und $\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} \leq \frac{1}{1+n}$.
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \exp(n) = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \exp(-n) = 0$
$\overset{\text{Korollar } 10.29}{\Rightarrow}$ $\exp : [-n, n] \to [\exp(-n), \exp(n)]$ ist bijektiv und steng monoton wachsend und $\cup_{n\in\mathbb{N}}[\exp(-n), \exp(n)] = \mathbb{R}_+$
$\Rightarrow \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ist bijektiv. ✓

$\overset{\text{Korollar } 10.31}{\Rightarrow}$ Die Umkehrfunktion $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ existiert, und sie ist stetig und streng monoton wachsend.

Behauptung 3: $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+$

Beweis. Setze $x' := \ln(x)$ und $y' := \ln(y)$.
$\Rightarrow \exp(x') = x$ und $\exp(y') = y \Rightarrow \exp(x' + y') = \exp(x') \cdot \exp(y') = x \cdot y$
$\Rightarrow \ln(x \cdot y) = x' + y' = \ln(x) + \ln(y)$. ✓

□

Kapitel 11

Differenzierbare Funktionen

Schreibweise für Grenzwerte:

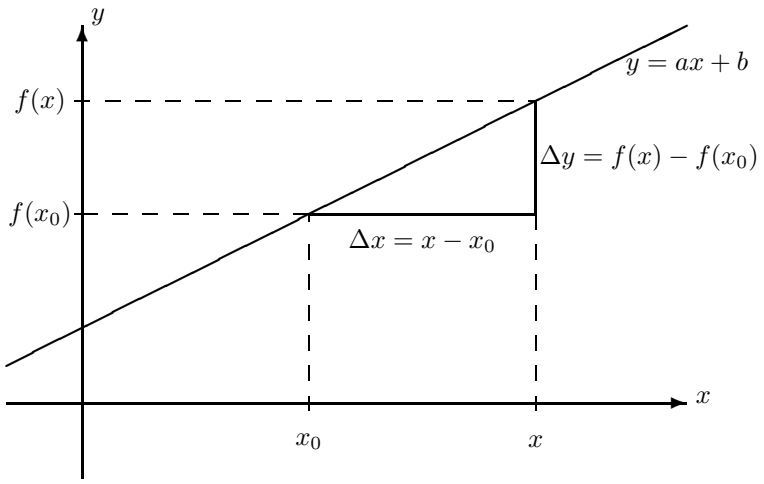
(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \overset{\text{Bedeutung}}{\rightsquigarrow} \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

(2) Verallgemeinerung:
$\lim\limits_{x\to x_0} \overset{\text{Bedeutung}}{\rightsquigarrow} \lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$

11.1 Differentiation

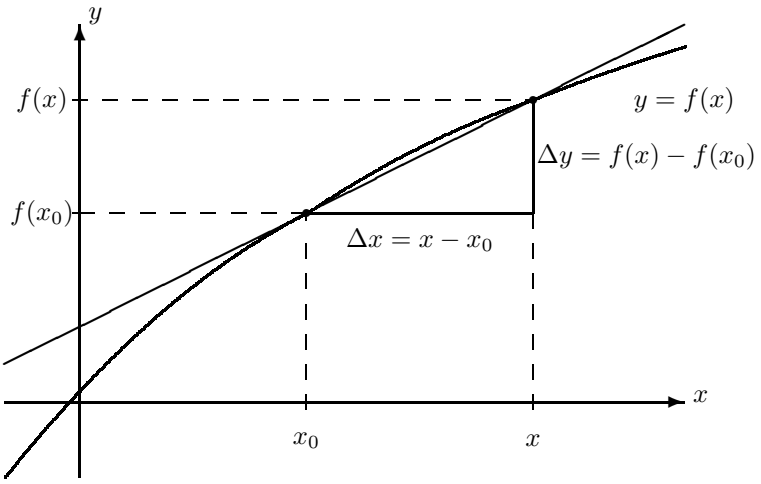
Ableitung $\leftsquigarrow$ Steigung $\leftsquigarrow$ lineare Approximation von Funktionen

Bei *Geraden* (lineare Funktionen):



Steigung der Geraden: $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

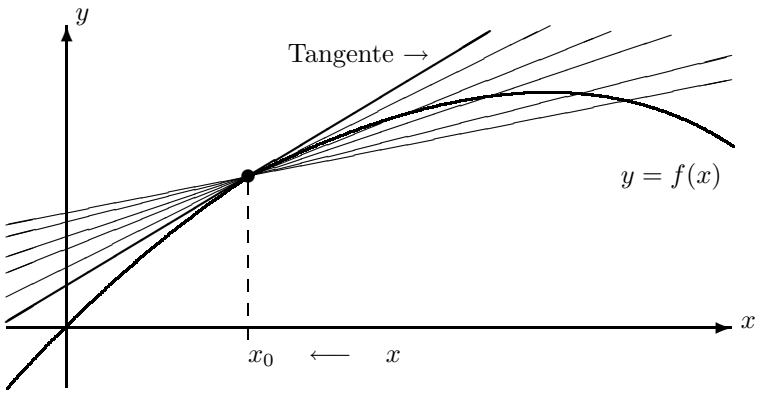
Bei *Funktionen*:



Steigung der Sekante: $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$ *Differenzenquotient*

Interpretation: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ gibt die *durchschnittliche Änderungsrate* von f zwischen den Punkten $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ an.

Frage: Was passiert, wenn wir die Seitenlänge Δx des Steigungsdreiecks verkleinern?



Beobachtung:

(1) Je näher wir x bei x_0 wählen, desto mehr wird die Sekante durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ zur *Tangente* an f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

(2) Die Steigung der Tangente an f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ gibt die Steigung von f in diesem Punkt an.

Interpretation: Die Tangente ist die *lineare Approximation* von f in $(x_0, f(x_0))$, ihre Steigung gibt die *Änderungsrate* von f an der Stelle x_0 an.

Definition 11.1. Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D_f$. Dann heißt f in x_0 *differenzierbar*, falls der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert, d.h., falls $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert. In diesem Fall schreibt man:

$$f'(x) = \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \quad \textit{Differentialquotient.}$$

Bemerkung.

(1) Bei der Limesbildung sind nur solche Folgen $(x_n)_{n \geq 1}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ zugelassen, für die $x_n \neq x_0$ und $x_n \in D_f$ gilt für alle $n \geq 1$.

(2) Äquivalent kann man definieren:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

wobei dann nur solche Folgen $(h_n)_{n \geq 1}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} h_n = 0$zugelassen sind, für die $h_n \neq 0$ und $x_0 + h_n \in D_f$ gilt für alle $n \geq 1$.

Definition 11.2. Die Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar* in D_f, falls f an jeder Stelle $x_0 \in D_f$ differenzierbar ist. In diesem Fall nennen wir $f' : D_f \to \mathbb{R}$ die *erste Ableitung* von f.

Schreibweisen für die Ableitung:

(1) $f'(x)$ oder y'

(2) $\frac{df}{dx}$ oder $\frac{dy}{dx}$ („df nach dx“)

(3) $\dot{y}$ („y Punkt“$\rightsquigarrow$ physikalische und technische Anwendungen)

$\vdots$

Beispiel 11.3.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$: konstante Funktion.

Behauptung: f ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0.$$

□

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax + b$: lineare Funktion.

Behauptung: $f'(x) = a$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{ax+b-(ax_0+b)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{a(x-x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} a = a. \end{aligned}$$

□

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$.

Behauptung: $f'(x) = 2x \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2x_0h+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2x_0+h) = 2x_0. \end{aligned}$$

□

(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \exp(x)$.

Behauptung: $f'(x) = \exp(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x_0+h)-\exp(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x_0)\cdot[\exp(h)-1]}{h} \\ &= \exp(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h}. \end{aligned}$$

Behauptung: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = 1$.

Beweis. In Beispiel 10.10(3) haben wir gezeigt, dass

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + r_{N+1}(x) \text{ mit } |r_{N+1}(x)| \le \frac{2\,|x|^{N+1}}{(N+1)!}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \le 1 + \frac{N}{2}$.
Setze $N = 1$ und $x = h \le \frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \exp(h) = 1 + h + r_2(h) \le 1 + h + \tfrac{2|h|^2}{2}, \quad |h| \le \tfrac{3}{2} \\ &\Rightarrow \quad \left|\tfrac{\exp(h)-1}{h} - 1\right| = \left|\tfrac{\exp(h)-(1+h)}{h}\right| \le |h|, \quad |h| \le \tfrac{3}{2} \\ &\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \tfrac{\exp(h)-1}{h} = 1 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Damit folgt: $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \exp(x_0)$, also

$$f'(x_0) = \exp(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

□

(5) (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x)$.

Behauptung: $f'(x) = \cos(x)$.

Beweis. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\
= \quad & \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} \\
\overset{\text{Korollar } 9.39(4)}{=} \quad & \lim_{h\to 0} \frac{2\cos(\frac{x_0+h+x_0}{2}) \cdot \sin(\frac{x_0+h-x_0}{2})}{h} \\
= \quad & \lim_{h\to 0} \cos(x_0+\frac{h}{2}) \cdot \underbrace{\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}}_{\to 1 \text{ (Beispiel } 10.15)} \\
= \quad & \lim_{h\to 0} \cos(x_0+\frac{h}{2}) \\
\overset{\cos(x) \text{ stetig}}{=} \quad & \cos(x_0).
\end{aligned}$$

□

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos(x)$.

Behauptung: $f'(x) = -\sin(x)$.

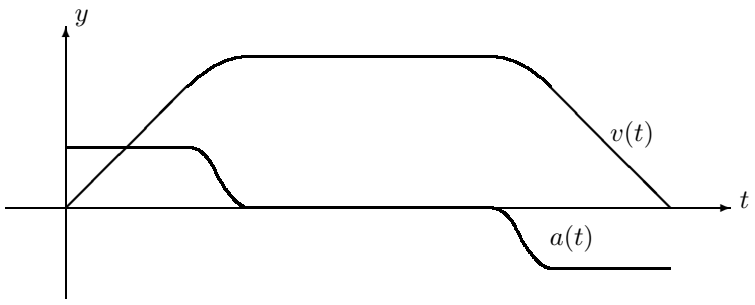
Beweis. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\
= \quad & \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0+h)-\cos(x_0)}{h} \\
\overset{\text{Korollar } 9.39(4)}{=} \quad & \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin(\frac{x_0+h+x_0}{2}) \cdot \sin(\frac{x_0+h-x_0}{2})}{h} \\
= \quad & \lim_{h\to 0} \left(-\sin(x_0+\tfrac{h}{2}) \cdot \underbrace{\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}}_{\to 1 \text{ (Beispiel } 10.15)} \right) \\
= \quad & \lim_{h\to 0} \left(-\sin(x_0+\tfrac{h}{2})\right) \\
\overset{\sin(x) \text{ stetig}}{=} \quad & -\sin(x_0).
\end{aligned}$$

□

(6) Auto:
Geschwindigkeit zur Zeit t: $v(t)$
Beschleunigung zur Zeit t: Änderungsrate der Geschwindigkeit

$$\Rightarrow a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}$$



Beobachtung:

- f steigend auf $I \subseteq D_f \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$,
- f fallend auf $I \subseteq D_f \Rightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$.

Der folgende Satz zeigt, dass eine Grundvoraussetzung der Differenzierbarkeit einer Funktion ihre Stetigkeit ist:

Satz 11.4. Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D_f$ differenzierbar.
Dann ist f in x_0 auch stetig.

Beweis. Sei $x_0 \in D_f$ und setze

$$\varphi(x) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in D_f.$$

Da f differenzierbar in x_0 ist, folgt:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to x_0} \tfrac{\varphi(x)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} (\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)) = 0 \\
\Rightarrow \quad & f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varphi(x) \text{ und } \lim_{x\to x_0} \tfrac{\varphi(x)}{x-x_0} = 0 \\
\Rightarrow \quad & \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varphi(x)) \\
& \qquad = f(x_0) + \lim_{x\to x_0} \Bigg(\underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} \cdot \Bigg(\underbrace{f'(x_0)}_{\to f'(x_0)} + \underbrace{\frac{\varphi(x)}{x - x_0}}_{\to 0} \Bigg) \Bigg) \\
& \qquad = f(x_0) \\
\Rightarrow \quad & f \text{ folgenstetig in } x_0.
\end{aligned}$$

□

11.2 Ableitungsregeln

Satz 11.5. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbare Funktionen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g$, $\lambda \cdot f$ und $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar und es gilt:

(1) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ (*Summenregel*)

(2) $(\lambda f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0)$ (*Homogenität*)

(3) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (*Produktregel*)

Ist $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$, so ist auch $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt:

(4) $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ (*Quotientenregel*)

Beweis. Die Behauptungen (1) und (2) folgen unmittelbar aus den entsprechenden Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen (vgl. Satz 9.16 und Korollar 9.17).

(3)

$$\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(x_0+h) - (f\cdot g)(x_0)}{h} \\
= & \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\
= & \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[f(x_0+h)\cdot(g(x_0+h)-g(x_0)) + (f(x_0+h)-f(x_0))\cdot g(x_0)\right] \\
= & \lim_{h\to 0} \left[\underbrace{f(x_0+h)}_{\overset{f \text{ stetig}}{\to} f(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{\to g'(x_0)} + \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{g(x_0)}_{\to g(x_0)}\right] \\
= & f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0) \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

(4)

Fall 1: $f(x) = 1 \quad \forall x \in D$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \lim_{h\to 0} \frac{(\frac{f}{g})(x_0+h) - (\frac{f}{g})(x_0)}{h} \\
= & \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\left(\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) \\
= & \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\left(\frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{g(x_0)g(x_0+h)}\right) \\
= & \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{1}{g(x_0)g(x_0+h)}}_{\overset{g \text{ stetig}}{\to}(g(x_0))^2} \cdot \left(\underbrace{\frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{h}}_{\to -g'(x_0)}\right) \\
= & \frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}
\end{aligned}$$

Fall 2: $f : D \to \mathbb{R}$ beliebig, differenzierbar in x_0.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= f'(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) \\
&= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0)\cdot\left(\frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\right) \\
&= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}. \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

□

Beispiel 11.6.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Behauptung: $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Beweis. durch vollständige Induktion:

Induktionsverankerung: $n = 1$: $f(x) = x^1$

$\Rightarrow f'(x) = 1 \cdot x^0 = 1$ ✓ (Beispiel 11.3(2))

Induktionsannahme: Sei die Aussage richtig für $n \geq 1$.

Induktionsschritt: $n \to n+1$: $f(x) = x^{n+1} = x \cdot x^n$

$\overset{\text{Produktregel}}{\to} f'(x) = 1 \cdot x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = x^n + n \cdot x^n = (n+1) \cdot x^n$ ✓

(2) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Behauptung: $f'(x) = -n \cdot x^{-n-1}$

Beweis. Nach der Quotientenregel ist

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot n \cdot x^{n-1}}{(x^n)^2} = -\frac{n}{x^{n+1}} = -n \cdot x^{-n-1} \quad ✓$$

□

Bemerkung: Allgemein gilt für $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

(3) Sei $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

Behauptung: $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

Beweis. Nach der Quotientenregel ist

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} \quad ✓ \end{aligned}$$

□

(4) $f(x) = (x^3 - \sin(x) + 10) \cdot \exp(x)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad f'(x) &= (3x^2 - \cos(x)) \cdot \exp(x) + (x^3 - \sin(x) + 10) \cdot \exp(x) \\ &= (x^3 + 3x^2 - \cos(x) - \sin(x) + 10) \cdot \exp(x). \end{aligned}$$

Satz 11.7. *Ableitung der Umkehrfunktion*:
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und streng monoton wachsende (bzw. fallende) Funktion. Außerdem sei $g : W_f \to [a,b]$ die Umkehrfunktion von f mit $W_f = [f(a), f(b)]$ (bzw. $W_f = [f(b), f(a)]$).
Ist f in $x_0 \in [a,b]$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$, so ist auch g in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Beweis. Wähle eine Folge $(h_n)_{n\geq 1}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ und $h_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$, $y_0 + h_n \in W_f \quad \forall n \geq 1$.
Setze $x_n := g(x_0 + h_n)$.

$$\begin{aligned}
&\overset{g \text{ stetig}}{\Rightarrow} && \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ und } x_n \neq x_0 \quad \forall n \geq 1, \text{ da } g \text{ bijektiv ist.} \\
&\Rightarrow && \lim_{n\to\infty} \frac{g(y_0+h_n)-g(y_0)}{h_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{g(y_0+h_n)-g(y_0)}{h_n + y_0 - y_0} \\
& && &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \\
& && &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0}} \\
& && &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{f'(x_0)}.
\end{aligned}$$

□

Beispiel 11.8. $\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$, denn:
$\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ (vgl. Satz 10.34).

$$\overset{\text{Satz } 11.7}{\Rightarrow} \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

Satz 11.9. *Kettenregel*:
Seien $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$ Funktionen und $f(D_f) \subseteq D_g$. Sei f in $x_0 \in D_f$ differenzierbar und sei g in $y_0 = f(x_0) \in D_g$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ differenzierbar in x_0 und es gilt:

$$(g \circ f)'(x_0) = \underbrace{g'(f(x_0))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\text{innere Ableitung}}$$

Beweis. Definiere die Funktion $\varphi : D_f \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)} & \text{für } y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) & \text{für } y = f(x_0) \end{cases}$$

Dann gilt: $\lim\limits_{y\to f(x_0)} \varphi(y) = g'(f(x_0))$, da g in $y_0 = f(x_0) \in D_g$ differenzierbar ist.
Außerdem gilt

$$g(y) - g(y_0) = \varphi(y)(y - y_0) \quad \forall y \in D_g$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \tfrac{(g\circ f)(x_0+h)-(g\circ f)(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \tfrac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{\varphi(f(x_0+h))\cdot(f(x_0+h)-f(x_0))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \underbrace{\varphi(f(x_0+h))}_{\to g'(f(x_0))} \cdot \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\to f'(x_0)} \\
&= g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)
\end{aligned}$$

□

Beispiel 11.10.

(1) $f(x) = \frac{1}{(5-2x)^4} = (5-2x)^{-4}$

$$\Rightarrow f'(x) = -4(5-2x)^{-3}\cdot(-2) = \frac{8}{(5-2x)^3}$$

(2) $f(x) = \tan(5-\sin(2x))$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-2\cos(2x)}{\cos^2(5-\sin(2x))}$$

Definition 11.11. Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ in D_f differenzierbar.
Falls $f' : D_f \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D_f$ differenzierbar ist, so ist

$$f''(x_0) := (f')'(x_0)$$

die *zweite Ableitung* von f in x_0.
Iterativ definiert man:
Falls die *k-te Ableitung* $f^{(k)} : D_f \to \mathbb{R}$, $k \geq 1$, in $x_0 \in D_f$ differenzierbar ist, so ist

$$f^{(k+1)}(x_0) := (f^{(k)})'(x_0)$$

die $(k+1)$*-te Ableitung* von f in x_0.

Beispiel 11.12. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 2x + 1$.

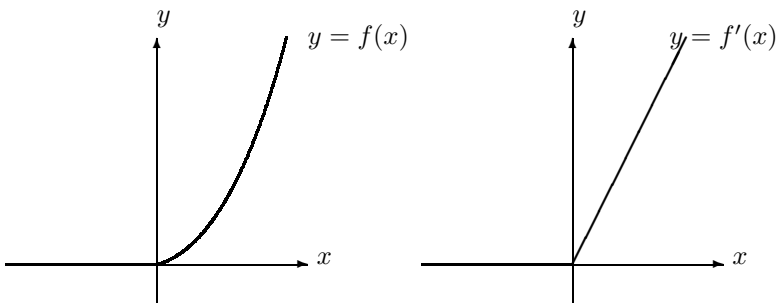
$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad f'(x) &= 9x^2 + 10x + 2 \\
f''(x) &= 18x + 10 \\
f'''(x) &= 18 \\
f^{(4)}(x) &= 0 \qquad \Rightarrow f^{(k)}(x) = 0 \quad \forall k \geq 4.
\end{aligned}$$

Definition 11.13. Eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt in D_f *k-mal stetig differenzierbar*, wenn die k-te Ableitung $f^{(k)} : D_f \to \mathbb{R}$ in D_f stetig ist.

Bemerkung. Im Allgemeinen folgt aus der Differenzierbarkeit einer Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ nicht, dass die Ableitung $f' : D_f \to \mathbb{R}$ wieder differenzierbar und/oder stetig ist.

Beispiel 11.14. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$



existiert, ist aber an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

Bemerkung. Ist $x_0 \in D_f$ und existiert der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

bzw. der linksseitige Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

so nennt man diese Grenzwerte *rechtsseitige* bzw. *linksseitige Ableitung* von f in x_0.
Dabei werden bei der Grenzwertbildung $\lim\limits_{x \to x_0 + 0}$ nur solche Folgen $(x_n)_{n \geq 1}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ zugelassen, für die $x_n > x_0$ und $x_n \in D_f$ gilt für alle $n \geq 1$. Analog betrachtet man bei $\lim\limits_{x \to x_0 - h}$ nur Folgen $(x_n)_{n \geq 1}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, für die $x_n < x_0$ und $x_n \in D_f$ gilt für alle $n \geq 1$.
f ist in x_0 genau dann differenzierbar, wenn rechtsseitige und linksseitige Ableitung existieren und gleich sind.

11.3 Monotonie und Extremwerte

Satz 11.15. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in (a, b) und $x_0 \in (a, b)$.

(1) Ist $f'(x_0) > 0$, so ist f in einer (genügend kleinen) Umgebung von x_0 streng monoton wachsend.

(2) Ist $f'(x_0) < 0$, so ist f in einer (genügend kleinen) Umgebung von x_0 streng monoton fallend.

Beweis.

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$

$$\Rightarrow \quad \exists \varepsilon > 0 : \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \forall x \in (a, b), |x - x_0| < \varepsilon$$

$$\overset{|x - x_0| < \varepsilon}{\Rightarrow} \quad f(x) - f(x_0) \begin{cases} > 0 & \text{falls} \quad x - x_0 > 0, \quad \text{also } x > x_0 \\ < 0 & \text{falls} \quad x - x_0 < 0, \quad \text{also } x < x_0 \end{cases}$$

$$\overset{|x - x_0| < \varepsilon}{\Rightarrow} \quad \begin{cases} f(x) > f(x_0) & \text{falls} \quad x > x_0 \\ f(x) < f(x_0) & \text{falls} \quad x < x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f \text{ ist streng monoton wachsend in } N_\varepsilon(x_0) = \{x \in (a, b) : |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

(2) Analog.

□

Satz 11.16. *Notwendige Bedingung für Extremwerte*
Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar, und sei $(x_0, f(x_0))$ ein lokales Maximum (bzw. Minimum) von f. Dann gilt:

$$f'(x_0) = 0.$$

Beweis. Sei $(x_0, f(x_0))$ ein lokales Maximum von f (für ein lokales Minimum verläuft der Beweis analog).

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \quad f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (a, b), |x - x_0| < \varepsilon.$$

Sei $(h_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ und $h_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$.

$$\overset{f \text{ differenzierbar in } x_0}{\Rightarrow} f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}.$$

(1) Wähle $(h_n)_{n\geq 1}$ so, dass $0 < h_n < \varepsilon \quad \forall n \geq 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{h_n}_{>0}} \leq 0$$

(2) Wähle $(h_n)_{n\geq 1}$ so, dass $0 > h_n > -\varepsilon \quad \forall n \geq 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{h_n}_{<0}} \geq 0$$

$$\overset{(1) \text{ und } (2)}{\Rightarrow} f'(x_0) = 0.$$

□

Bemerkung.

(1) Satz 11.16 gibt nur eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum.
Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ und $x_0 = 0$: $f'(x_0) = 3x_0^2 = 0$.

(2) Satz 11.16 gilt nicht für abgeschlossene Intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.
Beispiel: $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ hat ein lokales Minimum bei $x_{\min} = 0$ und ein lokales Maximum bei $x_{\max} = 1$, aber $f'(x) = 1 \quad \forall x \in [0, 1]$.

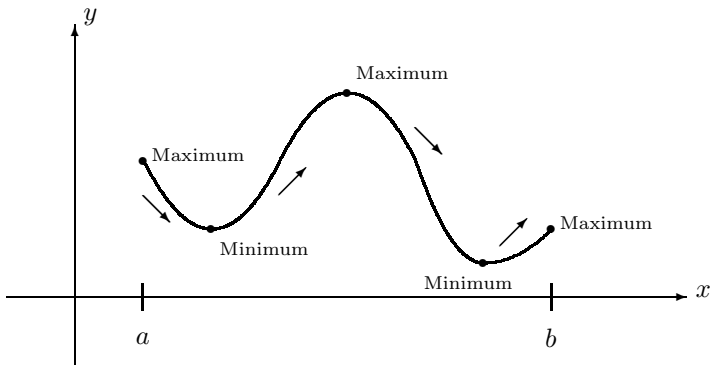
(3) Zur Bestimmung *aller* Extremwerte einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ müssen also

   (a) alle Punkte mit $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in [a, b]$, und

(b) die Randpunkte $x_0 = a$ und $x_0 = b$, und

(c) die Stellen, an denen f' nicht exisitiert

auf das Vorliegen eines Extremwerts untersucht werden.
Dazu kann zum Beispiel das Monotonieverhalten von f in einer Umgebung von Kandidaten $x_0 \in [a, b]$ untersucht werden.



Satz 11.17. *Hinreichende Bedingung für Extremwerte*
Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in (a, b). An der Stelle $x_0 \in (a, b)$ sei f zweimal differenzierbar, und es gelte:

$$f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) > 0 \quad (\text{bzw. } f''(x_0) < 0).$$

Dann hat f in x_0 ein lokales Minimum (bzw. Maximum).

Beweis.

(1) Sei $f''(x_0) > 0$

$$\Rightarrow \quad f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} > 0$$

$$\Rightarrow \quad \exists \varepsilon > 0 : \quad \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} > 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}, 0 < |h| < \varepsilon$$

$$\overset{f'(x_0)=0}{\Rightarrow} \quad f'(x_0 + h) \begin{cases} < 0 & \text{falls} \quad -\varepsilon < h < 0 \\ > 0 & \text{falls} \quad 0 < h < \varepsilon \end{cases}$$

$$\overset{\text{Satz 11.15}}{\Rightarrow} \quad \begin{cases} f \text{ ist streng monoton fallend auf } (x_0 - \varepsilon, x_0), \text{ und} \\ f \text{ ist streng monoton wachsend auf } (x_0, x_0 + \varepsilon). \end{cases}$$

Also hat f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum.

(2) Den Fall $f''(x_0) < 0$ beweist man analog.

□

11.4 Mittelwertsätze

Als einfache Folgerung von Satz 11.16, der notwendigen Bedingung für Extremwerte, erhält man zunächst das folgende Ergebnis:

Satz 11.18. *Satz von Rolle*
Sei $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$. Außerdem sei f differenzierbar in (a, b).
Dann existiert mindestens ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

Beweis.

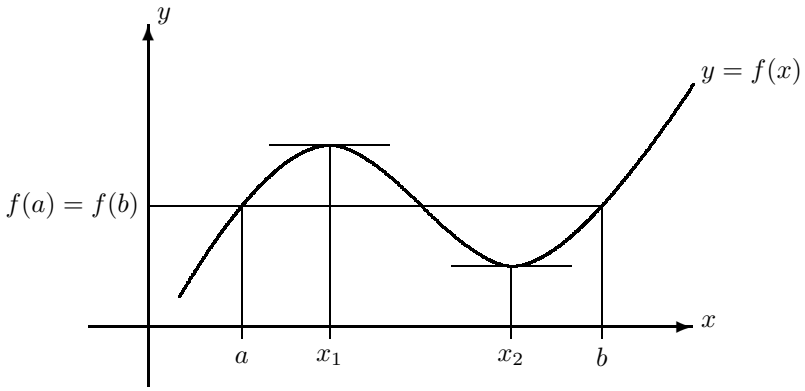
Fall 1: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist eine konstante Funktion, d.h. $f(x) = c \quad \forall x \in [a, b]$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$ ✓

Fall 2: f nicht konstant

$\overset{\text{Satz } 10.21}{\Rightarrow}$ f nimmt auf $[a, b]$ ihr absolutes Maximum und ihr absolutes Minimum an, und beide Extrema sind voneinander verschieden.
Wegen $f(a) = f(b)$ liegt mindestens eines dieser beiden Extrema an einer Stelle $x_0 \in (a, b)$, und aus Satz 11.16 folgt die Behauptung.

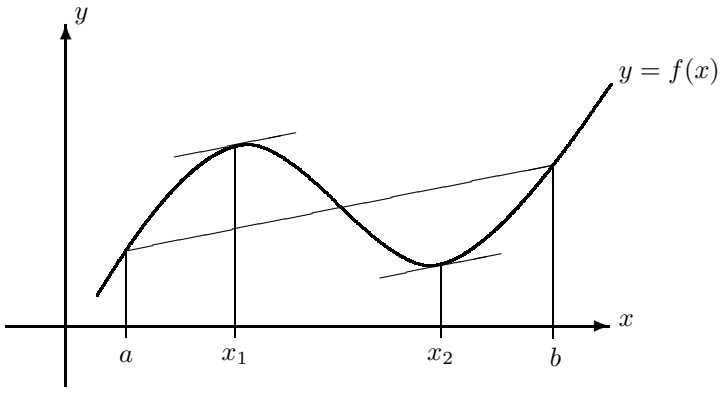
□



Mit Hilfe des Satzes von Rolle können wir nun die folgende wichtige Aussage beweisen.

Satz 11.19. *(Erster) Mittelwertsatz der Differentialrechnung*
Sei $a < b$, sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und sei f differenzierbar in (a, b). Dann existiert mindestens ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Beweis. Setze $\varphi := [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.
$\Rightarrow \varphi$ ist stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b), und es gilt:

$$\varphi(a) = f(a) = \varphi(b)$$

$$\overset{\text{Satz } 11.18}{\Rightarrow} \exists x_0 \in (a,b): \quad 0 = \varphi'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Den Mittelwertsatz kann man zum Beispiel zur (Fehler-) Abschätzung (z.B. für Funktionswerte am anderen Ende eines Intervalls) benutzen:

Korollar 11.20. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar; $a < b$. Für die Ableitung gelte: $M_1 \le f'(x) \le M_2 \quad \forall x \in (a,b)$ mit Konstanten $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$.
Dann gilt für alle $a \le x \le y \le b$ die Abschätzung

$$M_1(y-x) \le f(y) - f(x) \le M_2(y-x).$$

Außerdem erhält man, dass differenzierbare Funktionen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ genau dann konstant sind, wenn ihre Ableitung überall 0 ist:

Korollar 11.21. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar, $a < b$, mit $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$. Dann ist f konstant, d.h.

$$\exists c \in \mathbb{R}: \quad f(x) = c \quad \forall x \in [a,b].$$

Beweis. Setze $M_1 = M_2 = 0$ in Korollar 11.20. □

Als Verallgemeinerung von Satz 11.19 folgt außerdem:

Satz 11.22. *(Zweiter) Mittelwertsatz der Differentialrechnung.*
Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b), $a < b$. Außerdem sei $g(a) \ne g(b)$ und $g'(x) \ne 0 \quad \forall x \in (a,b)$. Dann existiert mindestens ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Beweis. Setze $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) := f(x) - (g(x)-g(a)) \cdot \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.
$\Rightarrow \varphi$ ist stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b), und es gilt:

$$\varphi(a) = f(a) = \varphi(b)$$

$$\overset{\text{Satz } 11.18}{\Rightarrow} \exists x_0 \in (a,b): \quad 0 = \varphi'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

□

11.5 Die Regeln von L'Hospital

In manchen Fällen hat uns in Kapitel 9 die Berechnung von Grenzwerten Schwierigkeiten bereitet, und zwar insbesondere dann, wenn Folgen (x_n), (y_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ und $(\overline{x}_n)$, $(\overline{y}_n)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{x}_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{y}_n = \infty$ in Quotienten oder Produkten verknüpft waren:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} =?, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{x}_n}{\overline{y}_n} =?, \quad \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{x}_n =?, \quad \ldots$$

Mit Hilfe der Mittelwertsätze aus dem vorigen Abschnitt ist nun in einigen Fällen eine einfache Lösung diese Problems möglich.

Satz 11.23. *Regel von L'Hospital* für „$\frac{0}{0}$“
Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in einer nichtleeren Umgebung $(a, b) \setminus \{x_0\}$ von $x_0 \in D$, und es gelte

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} =: c$, so existiert auch $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c.$$

Beweis. Sei $x_0 \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ sind entweder ohnehin stetig in x_0, oder sie sind dort (wegen der Differenzierbarkeit von f, g in $(a, b) \setminus \{x_0\}$) stetig ergänzbar mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$.
Sei nun $x \in (a, b)$, $x > x_0$.
$\Rightarrow$ Im Intervall $[x_0, x]$ sind die Voraussetzungen von Satz 11.22 erfüllt:

$$\overset{\text{Satz } 11.22}{\Rightarrow} \exists \xi \in (x_0, x) : \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Außerdem konvergiert $\xi \to x_0$ für $x \to x_0$. Da der Fall $x \in (a, b)$, $x < x_0$ zum gleichen Ergebnis führt, folgt damit die Behauptung. □

Satz 11.24. *Regel von L'Hospital* für „$\frac{\infty}{\infty}$“
Unter den Voraussetzungen von Satz 11.23 gelte

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ und } \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = 0 \text{ sowie } g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}.$$

Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} =: c$, so existiert auch $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c.$$

Beweis. Analog zu Satz 11.23. □

Beispiel 11.25.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)}{1}=1$ (vgl. Beispiel 10.15)

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{1}=0$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\exp(ax)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\exp(ax)}{1}=\infty$

Bemerkung.

(1) In Satz 11.23 und Satz 11.24 sind auch $x_0=a=-\infty$, $x_0=b=+\infty$ und $c=\pm\infty$ zugelassen.

(2) Grenzwerte der Form „$0\cdot\infty$“ behandelt man, indem man den Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$ umschreibt als $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ oder als $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$.

(3) Die Voraussetzungen von Satz 11.23 und Satz 11.24 *müssen* erfüllt sein, um die Regeln von L'Hospital anwenden zu können.

Beispiel 11.26.

$$\lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{x+\sin(x)}{x-\sin(x)}}_{-\frac{\infty}{\infty}-}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin(x)}{x}}{1-\frac{\sin(x)}{x}}=1,$$

aber die Regel von L'Hospital ergibt:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin(x))'}{(x-\sin(x))'}=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}}_{\text{unbestimmt divergent!}}$$

$\Rightarrow$ Da der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}$ nicht existiert, darf hier die Regel von L'Hospital nicht nochmals angewendet werden. Man sieht leicht, dass dies auf den falschen Grenzwert von $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-\sin(x)}{\sin(x)}=-1$ führen würde!

11.6 Der Satz von Taylor

Definition 11.27. Zwei Funktionen $f,g:D\to\mathbb{R}$ *berühren sich an der Stelle* $x_0\in D$ *mindestens von der Ordnung* n , $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, wenn für alle $x\in D$ gilt:

$$f(x)=g(x)+R_n(x,x_0)\text{ mit }\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x,x_0)}{(x-x_0)^n}=0.$$

Beispiel 11.28. Sei $f:D\to\mathbb{R}$ an der Stelle $x_0\in D$ differenzierbar, und sei

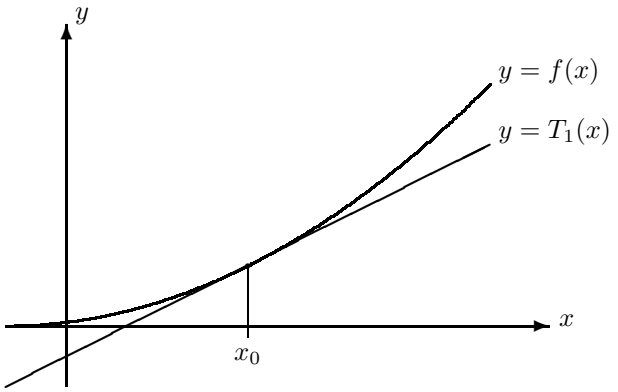
$$T_1(x):=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),\quad x\in D$$

die Tangente an f in x_0.
$\Rightarrow$ f und T_1 berühren sich in x_0 mindestens von der Ordnung 1, denn

$$R_1(x,x_0):=f(x)-T_1(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$$

erfüllt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_1(x,x_0)}{(x-x_0)^1} = \lim_{x\to x_0} \Big(\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} - f'(x_0) \Big) = 0.$$



Problem: Bestimme zu einer gegebenen Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ und zu gegebenem $x_0 \in D_f$ ein *Polynom* $T_n(x)$ vom Grad höchstens $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass sich f und T_n in x_0 mindestens von der Ordnung n berühren.

Beobachtung: Für $n = 1$ löst die Tangente an f in x_0 dieses Problem, sofern f in x_0 differenzierbar ist.

Zunächst werden wir im Folgenden zeigen, dass ein solches Polynom im Fall seiner Existenz eindeutig ist.

Satz 11.29. Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D_f$. Dann gibt es höchstens ein Polynom $T_n(x)$ vom Grad höchstens $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, das f in x_0 mindestens von der Ordnung n berührt.

Beweis. Annahme: Es gibt zwei unterschiedliche Polynome mit diesen Eigenschaften:

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \text{ und } P_n(x) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n(x) + R_n(x,x_0) \quad \text{mit} \quad \lim_{x\to x_0} \tfrac{R_n(x,x_0)}{(x-x_0)^n} = 0 \\ \text{und} \quad f(x) &= P_n(x) + Q_n(x,x_0) \quad \text{mit} \quad \lim_{x\to x_0} \tfrac{Q_n(x,x_0)}{(x-x_0)^n} = 0. \end{aligned}$$

Setze $L_n(x,x_0) := R_n(x,x_0) - Q_n(x,x_0)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{L(x,x_0)}{(x-x_0)^n} = 0$$

und

$$\begin{aligned} & 0 = T_n(x) - P_n(x) + L_n(x,x_0) && \forall x \in D_f \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - b_k)(x-x_0)^k + L_n(x,x_0) && \forall x \in D_f \end{aligned}$$

Sei nun j mit $0 \leq j \leq n$ der kleinste Index mit $a_j \neq b_j$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 0 &= \sum_{k=j}^{n} (a_k - b_k)(x - x_0)^k + L_n(x, x_0) \qquad | : (x - x_0)^j; x \neq x_0 \\
\Leftrightarrow \quad 0 &= \sum_{k=j}^{n} (a_k - b_k)(x - x_0)^{k-j} + \tfrac{L_n(x,x_0)}{(x-x_0)^j} \qquad \forall x \neq x_0, x \in D_f \\
\overset{x \to x_0}{\Rightarrow} \quad 0 &= \lim_{x \to x_0} \Big(a_j - b_j + \underbrace{\sum_{k=j+1}^{n} (a_k - b_k)(x - x_0)^{k-j}}_{\to 0} \\
&\qquad + \underbrace{\frac{L_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n}}_{\to 0} \cdot (x - x_0)^{n-j} \Big) \\
&= a_j - b_j \qquad \text{im Widerspruch zu } a_j \neq b_j.
\end{aligned}$$

□

Satz 11.30. *Taylor-Formel.*
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar in $[a, b], n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, und sei $x_0 \in (a, b)$, $a < b$.
Dann existiert genau ein Polynom $T_n(x)$ vom Grad höchstens n für das gilt:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x, x_0) \quad \forall x \in [a, b] \text{ und } \lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

T_n heißt *Taylor-Polynom n-ten Grades der Funktion f im Entwicklungspunkt x_0* und hat die Darstellung

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \quad x \in [a, b].$$

Das *Restglied* $R_n(x, x_0)$ hat die Darstellung

$$R_n(x, x_0) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \text{ mit } \xi := x_0 + \Theta(x - x_0) \text{ und } \Theta \in (0, 1).$$

Bemerkung. Für das Restglied $R_n(x, x_0)$ gibt es auch noch andere Darstellungen. In seiner obigen Form bezeichnet man es als *Lagrange'sches Restglied der Taylor-Formel*.

Beweis. von Satz 11.30:
Nach Satz 11.29 müssen wir nachweisen, dass

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n} = 0$$

gilt für die obige Darstellung von $R_n(x, x_0)$.
Dazu definieren wir zunächst eine Hilfsfunktion:
Sei $x \in [a, b]$, $x \neq x_0$ beliebig, aber fest, und setze

$$g(z) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z)}{k!}(x - z)^k \quad \forall z \in [a, b].$$

Außerdem sei

$$G(z) := g(z) - g(x_0)\left(\frac{x-z}{x-x_0}\right)^{n+1} \qquad \forall z \in [a,b]$$

(dabei ist $x - x_0 \neq 0$ eine Konstante). $\Rightarrow G$ ist differenzierbar in (a,b), und es gilt $g(x) = 0$ sowie $G(x) = 0 = G(x_0)$.

$\overset{\text{Satz } 11.18}{\Rightarrow}$ $\exists \xi := x_0 + \Theta(x - x_0)$ mit $\Theta \in (0,1)$, so dass

$$0 = G'(\xi) = g'(\xi) + g(x_0)\frac{(n+1)(x-\xi)^n}{(x-x_0)^{n+1}},$$

und aus der Definition von $g(z) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z)}{k!}(x-z)^k$ folgt

$$\begin{aligned} g'(z) &= -f'(z) - \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k!}\left(f^{(k+1)}(z)(x-z)^k - k f^{(k)}(z)(x-z)^{k-1}\right) \\ &= -\tfrac{f^{(n+1)}(z)}{n!} \cdot (x-z)^n \end{aligned}$$

Zusammen erhält man:

$$\begin{aligned} & 0 = g'(\xi) + g(x_0)\frac{(n+1)(x-\xi)^n}{(x-x_0)^{n+1}} \\ \Leftrightarrow\ & g(x_0) = -g'(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-\xi)^n} \\ & = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1} \\ & \overset{\text{Def. von } g}{=} f(x) - \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\ \Leftrightarrow\ & f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{=T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{=R_n(x,x_0)}. \end{aligned}$$

Für $R_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ gilt nun offensichtlich

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x,x_0)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}_{\text{konstant}} \cdot \underbrace{(x-x_0)}_{\to 0} = 0,$$

und der Satz ist gezeigt. □

Beispiel 11.31.

(1) $f(x) = \exp(x)$ und $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} & f^{(k)}(x) = \exp(x) \quad \forall k \geq 0 \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k \geq 0 \\ \Rightarrow\ & \exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + \tfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \\ & \qquad \xi = x_0 + \Theta(x-x_0), \quad \Theta \in (0,1) \\ & \overset{x_0=0}{=} \sum_{k=0}^{n} \tfrac{x^k}{k!} + \tfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp(\Theta x), \quad \Theta \in (0,1) \end{aligned}$$

(vgl. Beispiele 9.36 und 10.10)

(2) $f(x) = \sin(x)$ und $x_0 = 0$:
Es gilt:

$$\begin{array}{lllll} \text{(a)} & f^{(2k)}(x) & = & (-1)^k \sin(x) & \forall k \geq 0 \\ & \Rightarrow f^{(2k)}(0) & = & 0 & \forall k \geq 0 \\ \text{(b)} & f^{(2k+1)}(x) & = & (-1)^k \cos(x) & \forall k \geq 0 \\ & \Rightarrow f^{(2k+1)}(0) & = & (-1)^k & \forall k \geq 0 \end{array}$$

Damit gibt es ein $\xi = x_0 + \Theta(x - x_0)$ mit $\Theta \in (0,1)$, so dass gilt:

$$\sin(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{=T_n(x)} + \underbrace{\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)}_{=R_n(x)}$$

$$= \begin{cases} \underbrace{\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{=T_{2m+1}(x)} \\ \quad \underbrace{+ (-1)^{m+1} \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \sin(\Theta_1 x)}_{=R_{2m+1}(x)}, & n = 2m+1, \Theta_1 \in (0,1) \\ \underbrace{\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{=T_{2m+2}(x)} \\ \quad \underbrace{+ (-1)^{m+1} \frac{x^{2m+3}}{(2m+3)!} \cos(\Theta_2 x)}_{=R_{2m+2}(x)}, & n = 2m+2, \Theta_2 \in (0,1) \end{cases}$$

(vgl. Beispiel 9.36).

(3) $f(x) = \cos(x)$ und $x_0 = 0$:
Es gilt:

$$\begin{array}{lllll} \text{(a)} & f^{(2k)}(x) & = & (-1)^k \cos(x) & \forall k \geq 0 \\ & \Rightarrow f^{(2k)}(0) & = & (-1)^k & \forall k \geq 0 \\ \text{(b)} & f^{(2k+1)}(x) & = & (-1)^{k+1} \sin(x) & \forall k \geq 0 \\ & \Rightarrow f^{(2k+1)}(0) & = & 0 & \forall k \geq 0 \end{array}$$

Damit gibt es ein $\xi = x_0 + \Theta(x - x_0)$ mit $\Theta \in (0,1)$, so dass gilt:

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{=T_n(x)} + \underbrace{\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)}_{=R_n(x)} \\ &= \begin{cases} \underbrace{\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{=T_{2m}(x)} \\ \quad \underbrace{+(-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\sin(\Theta_1 x)}_{=R_{2m}(x)}, & n = 2m, \Theta_1 \in (0,1) \\ \underbrace{\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{=T_{2m+1}(x)} \\ \quad \underbrace{+(-1)^{m+1} \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\cos(\Theta_2 x)}_{=R_{2m+1}(x)}, & n = 2m+1, \Theta_2 \in (0,1) \end{cases}\end{aligned}$$

(vgl. Beispiele 9.36 und 10.23).

Im obigen Beispiel konvergieren die Taylor-Polynome für $n \to \infty$ jeweils gegen die gegebene Funktion (vgl. Beispiel 9.36), d.h. es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x, x_0) = 0.$$

Dies ist offensichtlich auch das allgemeine Kriterium für die Konvergenz der Taylor-Polynome $T_n(x)$ gegen $f(x)$:

Satz 11.32. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ∞-mal differenzierbar in $[a,b]$ und sei $x_0 \in (a,b)$, $a < b$. Dann hat $f(x)$ an der Stelle x_0 genau dann die *Taylor-Entwicklung*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \quad \forall x \in [a,b] \qquad (\textit{Taylor-Reihe})$$

wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x, x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = 0 \quad \forall x \in [a,b].$$

11.7 Numerische Lösung von Gleichungen

Problem 1: Für eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist ein *Fixpunkt* $z \in [a,b]$ gesucht, für den gilt:

$$f(z) = z.$$

Algorithmus 11.33. *Näherungsverfahren zu Bestimmung von Fixpunkten*

(Input) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktin; Abbruchkriterium $\varepsilon > 0$.

(1) Wähle einen Startwert $x_0 \in [a, b]$; $n := 0$.

(2) Falls $|f(x_n) - x_n| \leq \varepsilon$, `STOP`, eine genügend gute Näherung eines Fixpunktes ist gefunden.
Sonst setze $x_{n+1} := f(x_n)$, $n := n + 1$, und gehe zu (2).

Lemma 11.34. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in [a, b]$ und $x_{n+1} = f(x_n)\ \forall n \geq 0$. Falls $z = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existiert, so ist z ein Fixpunkt von f.

Beweis.

$$z = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(z), \text{ da } f \text{ stetig ist.}$$

□

Der folgende Satz beschreibt eine Situation, wo der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existiert und gibt ausserdem eine Fehlerabschätzung an.

Satz 11.35. *Kontraktionsfixpunktsatz*
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f([a, b]) \subseteq [a, b]$. Außerdem gebe es ein $q < 1$, so dass $|f'(x)| \leq q\ \forall x \in [a, b]$ gilt. Sei $x_0 \in [a, b]$ beliebig und $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$.
Dann konvergiert die Folge (x_n) gegen die eindeutige Lösung $z \in [a, b]$ der Gleichung $f(z) = z$. Es gilt die Fehlerabschätzung:

$$|z - x_n| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|, \quad n \geq 1.$$

Beweis. Aus dem Mittelwertsatz folgt (Korollar 11.20):

$$|f(y) - f(x)| \leq q \cdot |y - x| \quad \forall x, y \in [a, b]$$

$\Rightarrow |x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq q \cdot |x_n - x_{n-1}| \leq \cdots \leq q^n \cdot |x_1 - x_0|$.
Es gilt:

$$x_{n+1} = x_0 + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k)}_{\text{konvergente Reihe nach dem Majorantenkriterium (wegen } q < 1)}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existiert; setze $z := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$
$\overset{\text{Lemma } 11.34}{\Rightarrow}$ z ist Fixpunkt von f.

Behauptung: z ist einziger Fixpunkt von f.

Beweis. Annahme: $z' \in [a, b]$ sei ein weiterer Fixpunkt, also $f(z') = z'$.
$\Rightarrow |z - z'| = |f(z) - f(z')| = q\,|z - z'|$ mit $q < 1$
$\Rightarrow z = z'$. ✓

Behauptung: Es gilt die Fehlerabschätzung

$$|z - x_n| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|$$

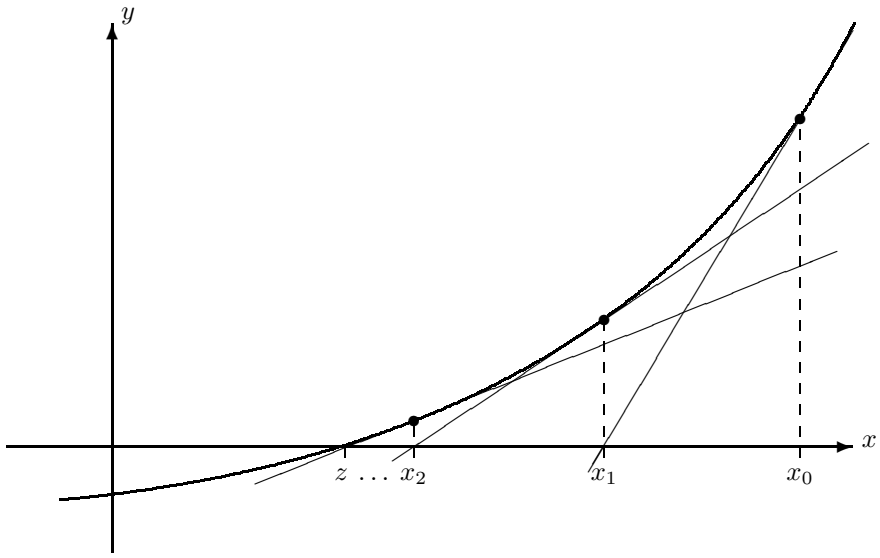
Beweis. Für alle $n \geq 1$ und $k \geq 1$ gilt:

- $|x_{n+k} - x_{n+k-1}| \leq q^k |x_n - x_{n-1}|$.
- Außerdem ist $z - x_n = \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n+k} - x_{n+k-1})$.

$\Rightarrow |z - x_n| \leq \sum_{k=1}^{\infty} q^k |x_n - x_{n-1}| = \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|$. ✓

□

Problem 2: Bestimmung von Nullstellen von Funktionen.



Annahme: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar in $[a, b]$ und $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in [a, b]$.
Idee: An einem Stützpunkt $(x_n, f(x_n))$, $n \geq 0$, wird f durch die Tangente $T_1(x) = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$ approximiert. Von dieser bestimmt man die Nullstelle als

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

und betrachtet diese als bessere Näherung für die gesuchte Nullstelle z.

Algorithmus 11.36. *Newton-Verfahren*

(Input) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar; Abbruchkriterium $\varepsilon > 0$.

(1) Wähle einen Startwert $x_0 \in [a, b]$, $n := 0$.

(2) Falls $f(x_n) < \varepsilon$, `STOP`, eine genügend gute Näherung einer Nullstelle ist gefunden.
Sonst setze $x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n := n+1$, und gehe zu (2).

Lemma 11.37. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in $[a,b]$, $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$, $x_0 \in [a,b]$ und

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \forall n \geq 0.$$

Falls $z = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existiert, so gilt $f(z) = 0$.

Beweis.

$$\begin{aligned} & z = \lim_{n\to\infty} x_n \\ \Rightarrow \quad & z = z - \tfrac{f(z)}{f'(z)}, \text{ da } f \text{ und } f' \text{ stetig sind} \\ \Rightarrow \quad & f(z) = 0. \end{aligned}$$

□

Wieder kann unter bestimmten Voraussetzungen die Existenz des Grenzwertes $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ nachgewiesen werden.

Satz 11.38. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf dem Intervall $[a,b]$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

(NT1) $f(a) \cdot f(b) = 0$
(d.h. $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ oder $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$).

(NT2) f ist zweimal stetig differenzierbar in $[a,b]$ mit $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$.

Dann gilt:

(1) Die Gleichung $f(x) = 0$ hat genau eine Lösung $z \in [a,b]$.

(2) Gibt es für einen Startwert $x_0 \in (a,b)$ reelle Zahlen $r > 0$ und $0 < q < 1$, so dass für

$$I := [x_0 - r, x_0 + r] \subseteq [a,b]$$

gilt:

(NT3) $\left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right| \leq q \ \forall x \in I$,

(NT4) $\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq (1-q) \cdot r$,

dann konvergiert das Newton-Verfahren mit Startwert x_0 gegen $z \in [a,b]$ und es gilt die *a posteriori Fehlerabschätzung*

$$|x_n - z| \leq \frac{|f(x_n)|}{m} \quad \text{mit } m := \min_{t\in I} |f'(t)| .$$

(3) Ist f sogar dreimal stetig differenzierbar in $[a,b]$, so konvergiert die Newton-Folge unter den Bedingungen (NT1)-(NT4) sogar quadratisch, d.h. es existiert $K > 0$ mit

$$|x_{n+1} - z| \leq K(x_n - z)^2 \quad \forall n \geq 0.$$

Beweis.

(1) Folgt aus dem Nullstellensatz von Bolzano (Satz 10.22) und der Monotonie von f, da gilt $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in [a,b]$ und f' stetig.

(2) Setze $\rho(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)} \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \rho'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$
$\overset{\text{(NT3)}}{\Rightarrow} |\rho'(x)| \leq q \ \forall x \in I$
$\overset{\text{Satz 11.35}}{\Rightarrow} (x_n)$ mit $x_{n+1} = \rho(x_n)$ konvergiert gegen die eindeutige Lösung z von $\rho(z) = z$
$\Rightarrow z = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$
$\Rightarrow f(z) = 0.$
Die Fehlerabschätzung folgt aus dem Mittelwertsatz (Satz 11.19):

$$\exists \xi = x_n + \Theta(z - x_n), \quad \Theta \in (0,1): \quad f'(\xi) = \frac{f(x_n) - f(z)}{x_n - z}$$

$$\Rightarrow |f(x_n)| = |f(x_n) - f(z)| = |f'(\xi)| \cdot |x_n - z| \geq m \cdot |x_n - z|.$$

(3) f dreimal stetig differenzierbar $\Rightarrow \rho$ zweimal stetig differenzierbar.
Mit der Taylor-Formel folgt:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= T_1(x) + R_1(x,z) \\ &= \rho(z) + \rho'(z)(x-z) + \tfrac{1}{2!}\rho''(x + \Theta(x-z)) \cdot (x-z)^2, \quad \Theta \in (0,1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \rho(x) - \rho(z) = \rho'(z)(x-z) + \frac{1}{2!}\rho''(x + \Theta(x-z)) \cdot (x-z)^2, \quad \Theta \in (0,1)$$

Setzt man hier $x = x_n$ und verwendet $\rho(x_n) = x_{n+1}$, sowie $\rho(z) = z$ und $\rho'(z) = 0$ (siehe (2)), so folgt für $K := \frac{1}{2} \max\limits_{t \in I} |\rho''(t)|$:

$$|x_{n+1} - z| \leq K \cdot (x_n - z)^2$$

□

Bemerkung.

(1) Neben der *a-posteriori-Fehlerabschätzung*

$$|x_n - z| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}$$

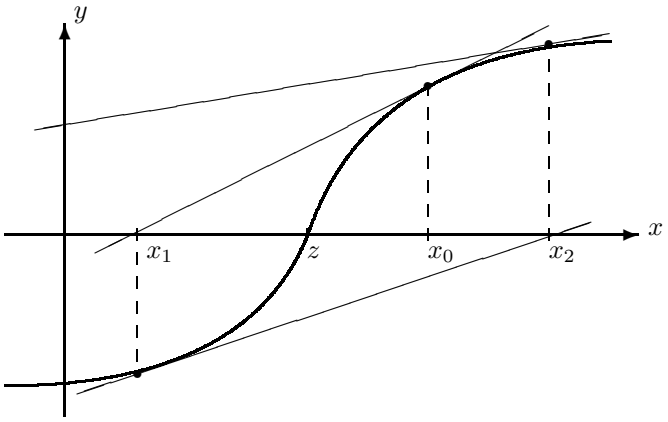
hat man nach Satz 11.35 auch eine *a-proiri-Fehlerabschätzung*

$$|x_n - z| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0| \quad \forall n \geq 1.$$

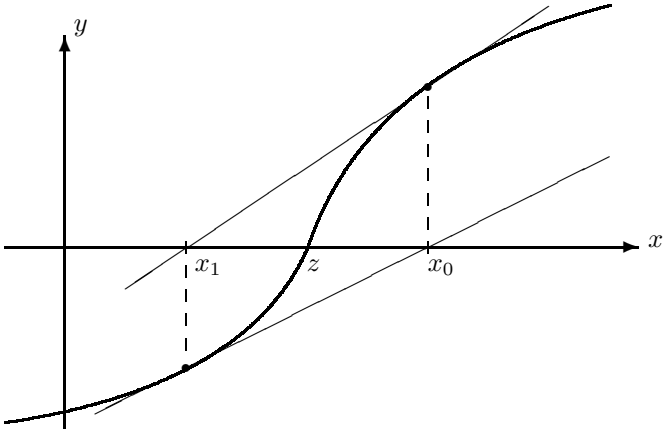
(2) In der Praxis ist es oft schwer, das *Kontraktionsintervall* I zu bestimmen und die Bedingungen (NT3) und (NT4) zu überprüfen.
Man kann dann versuchen, einen Startpunkt in der Nähe der vermuteten Nullstelle zu wählen und das Konvergenzverhalten des Newton-Verfahrens boebachten.

Mögliche Probleme:

(a) Das Verfahren führt immer weiter von der gesuchten Nullstelle weg:



(b) Das Verfahren kann in einen Zyklus geraten:



Beispiel 11.39. Die m-te Wurzel einer positiven reellen Zahl a ist die reelle Lösung der Gleichung $f(x) = x^m - a = 0$, $m \geq 2$, $a > 0$. Das Newton-Verfahren hat in diesem Fall die Form

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^m - a}{m x_n^{m-1}} = \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{a}{x_n^{m-1}} + (m-1)x_n \right), \quad n \geq 0.$$

Ist z.B. $a = 2$ und $m = 2$ und startet man mit $x_0 = 2$, so erhält man

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x_n} + x_n \right), \quad n \geq 0$$

und damit:

n	x_n
0	2
1	1.5
2	1.416666
3	1.414215
4	1.414213
$\vdots$	$\vdots$

Kapitel 12

Integralrechnung

12.1 Stammfunktionen

Die Operation, die wir in diesem Abschnitt betrachten, kann man als „Umkehrung“ der Differentiation bezeichnen.

Definition 12.1. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von f (oder ein *unbestimmtes Integral* von f), wenn F differenzierbar in I ist und wenn gilt:

$$F' = f \quad (\text{d.h., } F'(x) = f(x)\ \forall x \in I).$$

Schreibweise:

(1) $C^{(k)}(I) := \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar in } I\}$; $k \geq 1$
$C^{(0)}(I) := \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig in } I\}$

(2) Hat eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion, so setzt man

$$\int f(x)dx := \{F \in C^{(1)}(I) : F' = f\}.$$

Satz 12.2. Sei $f : I \to \mathbb{R}$, und seien $F, G : I \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen von F. Dann ist $F - G$ konstant.

Beweis. $F - G : I \to \mathbb{R}$ ist eine differenzierbare Funktion und es gilt:

$$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$$

$\overset{\text{Korollar } 11.21}{\Rightarrow}$ $F - G$ ist eine konstante Funktion in I. □

Schreibweise:
$\int f(x)dx := \{F \in C^{(1)}(I) : F' = f\} = \{F + c, c \in \mathbb{R}\} = F + c, \quad c \in \mathbb{R}$
(bzw. $\int f(x)dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$),
wobei $F : I \to \mathbb{R}$ eine beliebige Stammfunktion von f ist.

Beispiel 12.3.

(1) Auf $I := (0, \infty)$ ist für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Probe: $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\right) = \frac{(\alpha+1)x^\alpha}{(\alpha+1)} = x^\alpha$ ✓

(2) (a) $I := (0, \infty)$:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Probe: $\frac{d}{dx}(\ln(x) + c) = \frac{1}{x}$ ✓

(b) $I := (-\infty, 0)$:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln(-x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Probe: $\frac{d}{dx}(\ln(-x) + c) = \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ ✓

(3) $I := (-\infty, \infty)$:

(a) $\int \exp(x)dx = \exp(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$
(b) $\int \cos(x)dx = \sin(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$
(c) $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(4) $I := (-\infty, \infty)$: $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(5) $I := (-1, 1)$: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(6) $I := (-\infty, \infty)$: $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \operatorname{arcsinh}(x) + c = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(7) $I := (1, \infty)$: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{arcosh}(x) + c = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(8) (a) $I := (1, \infty)$: $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = 2\sqrt{x-1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(b) $I := (-1, \infty)$: $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx = 2\sqrt{x+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

(9) $I := (0, 1)$:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx = -\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Probe:

$$\begin{aligned}
& \tfrac{d}{dx}\left[-\ln\left(\tfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)+c\right] \\
= & -\tfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\cdot\left[-\tfrac{1}{x^2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)+\tfrac{1}{x}\left(\tfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)\right)\right] \\
= & \tfrac{1}{x}+\tfrac{x}{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{1-x^2}} \\
= & \tfrac{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{1-x^2}+x^2}{x\sqrt{1-x^2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} \\
= & \tfrac{\sqrt{1-x^2}+1-x^2+x^2}{x\sqrt{1-x^2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} \\
= & \tfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

Schreibweise: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, seien M, N Mengen von auf I definierten Funktionen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

(1) $M + N := \{F + G : F \in M, G \in N\}$

(2) $\lambda M := \{\lambda F : F \in M\}$.

Satz 12.4. Haben $f, g : I \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so haben auch $f + g$ und λf Stammfunktionen, und es gilt:

(1) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(2) $\lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$.

Beweis. Folgt direkt aus der Definition und den entsprechenden Rechenregeln für die Differentiation. □

Satz 12.5. *Partielle Integration.*
Seien $f, g \in C^{(1)}(I)$. Besitzt $f' \cdot g$ eine Stammfunktion, so besitzt auch $f \cdot g'$ eine Stammfunktion und es gilt:

$$\int f(x)g'(x)dx = f \cdot g - \int f'(x)g(x)dx$$

Beweis.

(1) Sei G eine Stammfunktion von $f' \cdot g$. Dann gilt:
$(f \cdot g - G) \in C^{(1)}(I)$ und
$(f \cdot g - G)' = f'g + fg' - G' = f'g + fg' - f'g = fg'$
$\Rightarrow (fg - G)$ ist eine Stammfunktion von fg'
$\Rightarrow$ Jedes Element der rechten Seite der Gleichung (d.h., jedes Element von $f \cdot g - \int f'(x)g(x)dx$) ist auch Element der linken Seite.

(2) Die andere Richtung zeigt man analog.

□

Bemerkung. Die partielle Integration entspricht einer Umkehrung der Produktregel aus Satz 11.5(3).

Beispiel 12.6.

(1) $I := (0, \infty)$:

$$\begin{aligned}\int \underbrace{\ln(x)}_{f} \cdot \underbrace{1}_{g'} dx &= \underbrace{\ln(x)}_{f} \cdot \underbrace{x}_{g} - \int \underbrace{\tfrac{1}{x}}_{f'} \cdot \underbrace{x}_{g} dx \\ &= \ln(x) \cdot x - x + c \\ &= x\,(\ln(x) - 1) + c, \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

(2) $I := (-\infty, \infty)$:

$$\int \underbrace{x^n}_{f} \cdot \underbrace{\exp(x)}_{g'} dx = \underbrace{x^n}_{f} \cdot \underbrace{\exp(x)}_{g} - \int \underbrace{nx^{n-1}}_{f'} \cdot \underbrace{\exp(x)}_{g} dx, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Durch Induktion folgt:

$$\int \underbrace{x^n}_{f} \cdot \underbrace{\exp(x)}_{g'} dx = \exp(x) \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot [n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)] \cdot x^{n-k} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Satz 12.7. *Integration durch Substitution.*
Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und sei $\varphi(I) \subseteq J$. Ist $F : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar und ist $f := F'$, so ist $F \circ \varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion der Funktion $(f \circ \varphi) \cdot \varphi' : I \to \mathbb{R}$, d.h. es gilt auf I:

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F \circ \varphi + c =: \left(\int f(u) du \right)_{u=\varphi(x)}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Beweis. Nach Satz 11.9 (Kettenregel) ist $F \circ \varphi$ differenzierbar, und es gilt:

$$(F \circ \varphi)' = (F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'.$$

□

Beispiel 12.8.

(1) $I := (-\infty, \infty), n \in \mathbb{N}$:

$$\int (\sin(x))^n \cdot \cos(x) dx = \left(\int u^n du \right)_{u=\sin(x)} = \frac{(\sin(x))^{n+1}}{n+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(2) $I := (-\infty, \infty), n \in \mathbb{N}$:

$$\int x \cdot \exp(x^2) dx = \frac{1}{2} \cdot \int \exp(x^2) \cdot 2x \, dx = \frac{1}{2} \left(\int \exp(u) du \right)_{u=x^2} = \frac{1}{2} \exp(x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(3) $I := (-\infty, \infty), n \in \mathbb{N}$:

$$\int \frac{\exp(x) - 1}{\exp(x) + 1} dx = \left(\int \frac{u-1}{u+1} \cdot \frac{1}{u} du \right)_{u=\exp(x)}$$

denn aus der Substitution $u = \exp(x)$ folgt $\frac{du}{dx} = \exp(x)$
$\Rightarrow dx = \frac{du}{\exp(x)} = \frac{du}{u}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \int \tfrac{\exp(x)-1}{\exp(x)+1} dx &= \left(\int \tfrac{u-1}{u+1} \cdot \tfrac{1}{u} du \right)_{u=\exp(x)} \\ &= \left(\int \left(\tfrac{2}{u+1} - \tfrac{1}{u} \right) du \right)_{u=\exp(x)} \\ &= \left(2\ln(1+u) - \ln(u) + c \right)_{u=\exp(x)} \\ &= 2\ln(1+\exp(x)) - x + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Bemerkung. In der Differentialrechnung kann man für jede differenzierbare Funktion ihre Ableitung angeben.
Wir werden später zeigen, dass jede stetige Funktion eine Stammfunktion hat, doch kann man diese nicht immer durch „elementare“ Funktionen wie sin, ln, exp, ... beschreiben.
Zum Beispiel gibt es keine „elementare“ Funktion, deren Ableitung die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(-x^2)$ ist.

12.2 Integration rationaler Funktionen

Zu rationalen Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, g, h Polynome, $g(x) \neq 0$ $\forall x \in D$, lassen sich auf systematische Weise Stammfunktionen gewinnen:

Schritt 1: Man zerlegt f durch „Ausdividieren“ in einen *Polynom-Anteil* und einen *echt-rationalen* Anteil, für den der Grad des Nennerpolynoms größer ist als der des Zählerpolynoms.
Zu dem Polynom kann man direkt eine Stammfunktion angeben.

Beispiel 12.9.

$$\int \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x} dx = \int (x-2) dx + \int \frac{3x-1}{x^2+x} dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{3x-1}{x^2+x} dx$$

Schritt 2: Zu einer echt-rationalen Funktion $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, $\mathrm{Grad}(g) < \mathrm{Grad}(h)$, gewinnt man eine Stammfunktion, indem man sie in *Teilbrüche* (*Partialbrüche*) mit Hilfe einer *Partialbruchzerlegung* zerlegt:

Fall 1: Das Nennerpolynom $h(x)$ hat ausschließlich einfache reelle Nullstellen:

$$h(x) = a_n (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

$\rightsquigarrow$ Ansatz:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}, \quad A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}.$$

Um die Konstanten $A_1, \ldots, A_n$ zu berechnen, multipliziert man diesen Ansatz mit dem Hauptnenner $h(x)$ und führt auf beiden Seiten der Gleichung einen Koeffizientenvergleich durch.

Beispiel 12.10. (Fortsetzung von Beispiel 12.9)
Für

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{3x-1}{x(x+1)}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$$

sind $x_1 = 0$ und $x_2 = -1$ die Nullstellen des Nennerpolynoms.

$$\begin{array}{rrcll} \rightsquigarrow \text{Ansatz:} & f(x) & = & \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1} & \mid \cdot x(x+1) \\ \Leftrightarrow & 3x-1 & = & A_1 \cdot (x+1) + A_2 \cdot x & \\ \Leftrightarrow & 3x-1 & = & (A_1 + A_2) \cdot x + A_1 & \end{array}$$

Da diese Gleichung für alle $x \in D$ erfüllt sein muss folgt, dass die Koeffizienten von x^k, $k = 0, 1, \ldots, n$, auf beiden Seiten der Gleichung identisch sein müssen.

$$\rightsquigarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} x^0 & : & -1 & = & A_1 \\ x^1 & : & 3 & = & A_1 + A_2 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad A_2 = 3 + 1 = 4$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{-1}{x} + \frac{4}{x+1}$$

Dieses Verfahren führt also auf ein lineares Gleichungssystem mit n Unbekannten $A_1, \ldots, A_n$, das man zum Beispiel mit Hilfe des Algorithmus 5.36 (Gaußsches Eliminationsverfahren) lösen kann.

Fall 2: Das Nennerpolynom $h(x)$ hat mehrfache komplexe Nullstellen, zum Beispiel die Nullstelle x_m von der Vielfachheit k.
$\rightsquigarrow$ Ansatz:

$$f(x) = \cdots + \frac{B_k}{(x-x_m)^k} + \frac{B_{k-1}}{(x-x_m)^{k-1}} + \cdots + \frac{B_1}{(x-x_m)} + \ldots$$

Fall 3: Das Nennerpolynom $h(x)$ hat konjugiert komplexe Nullstellen der Form $x_c \pm iy_c$.
$\Rightarrow$ Dann ist das Produkt

$$(x - (x_c + iy_c))(x - (x_c - iy_c)) = [(x - x_c)^2 + y_c^2]$$

reell unzerlegbar.
$\rightsquigarrow$ Ansatz:

$$f(x) = \cdots + \frac{Cx + D}{[(x-x_c)^2 + y_c^2]} + \ldots$$

Fall 4: Das Nennerpolynom $h(x)$ hat mehrfache komplexe Nullstellen.
$\rightsquigarrow$ Ansatz:

$$f(x) = \cdots + \frac{C_k x + D_k}{[(x-x_c)^2 + y_c^2]^k} + \frac{C_{k-1} x + D_{k-1}}{[(x-x_c)^2 + y_c^2]^{k-1}} + \cdots + \frac{C_1 x + D_1}{[(x-x_c)^2 + y_c^2]} + \ldots$$

Beispiel 12.11.

$$f(x) = \frac{x^4 - x^2 - x - 2}{x^5 + x^3} = \frac{x^4 - x^2 - x - 2}{x^3(x^2+1)}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$\Rightarrow x_1 = 0$ ist dreifache reelle Nullstelle, und
$x_{2,3} = \pm i$ ist einfach konjugiert komplexe Nullstelle, d.h.
(x^2+1) ist reell unzerlegbar.
$\rightsquigarrow$ Ansatz:

$$f(x) = \frac{B_3}{x^3} + \frac{B_2}{x^2} + \frac{B_1}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \quad | \cdot x^3(x^2+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^4 - x^2 - x - 2 = B_3(x^2+1) + B_2 x(x^2+1) + B_1 x^2(x^2+1) + (Cx+D)x^3$$
$$\Leftrightarrow \quad x^4 - x^2 - x - 2 = x^4(B_1+C) + x^3(B_2+D) + x^2(B_3+B_1) + xB_2 + B_3$$

$$\rightsquigarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x^0 & : & -2 & = & B_3 & & & & \\ x^1 & : & -1 & = & B_2 & & & & \\ x^2 & : & -1 & = & B_3 + B_1 & \Rightarrow & B_1 & = & 1 \\ x^3 & : & 0 & = & B_2 + D & \Rightarrow & D & = & 1 \\ x^4 & : & 1 & = & B_1 + C & \Rightarrow & C & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{-2}{x^3} + \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+1}$$

Bemerkung. Ist $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ eine rationale Funktion mit $\mathrm{Grad}(g) < \mathrm{Grad}(h)$, so ist immer eine Partialbruchzerlegung möglich, denn:
Sei $x_1 \in \mathbb{C}$ eine k_1-fache Nullstelle von $h(x)$, d.h.:

$h(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot h_1(x)$, wobei h_1 ein Polynom ist, für das x_1 keine Nullstelle ist.

Dann gilt:

(1)

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(x)}{(x-x_1)^{k_1} h_1(x)}$$

(2)

$$\lim_{x \to x_1} \frac{g(x)}{h_1(x)} = \frac{g(x_1)}{h_1(x_1)}$$

(d.h., x_1 ist nicht Nullstelle von h_1).

Außerdem gilt:

(3)

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{h(x)} - \frac{1}{(x-x_1)^{k_1}} \cdot \frac{g(x_1)}{h_1(x_1)} &= \frac{g(x)}{(x-x_1)^{k_1} h_1(x)} - \frac{g(x_1)}{(x-x_1)^{k_1} h_1(x_1)} \\ &= \frac{g(x)h_1(x_1) - g(x_1)h_1(x)}{(x-x_1)^{k_1} h_1(x) h_1(x_1)} \\ &=: \frac{R(x)}{(x-x_1)^{k_1} h_1(x)} \end{aligned}$$

mit

$$R(x) := \frac{1}{h_1(x_1)} \cdot (g(x)h_1(x_1) - g(x_1)h_1(x))$$

und damit $R(x_1) = 0$.
$\Rightarrow$ Das Polynom $R(x)$ ist durch $(x - x_1)$ teilbar.
$\overset{(3)}{\Rightarrow}$

$$\begin{aligned}\frac{g(x)}{h(x)} &= \frac{1}{(x-x_1)^{k_1}} \cdot \underbrace{\frac{g(x_1)}{h_1(x_1)}}_{=:A_1 \text{ (konstant)}} + \frac{R(x)}{(x-x_1)^{k_1} h_1(x)} \\ &= \frac{A_1}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{R_1(x)}{(x-x_1)^{k_1-1} h_1(x)}\end{aligned}$$

mit

$$R(x) =: (x - x_1) \cdot R_1(x).$$

$\rightsquigarrow$ Iterative Anwendung dieses Verfahrens liefert das gewünschte Ergebnis.

Schritt 3: Integration der Partialbrüche

(1)

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \left(\int \frac{1}{u} du \right)_{u=x-a} = A \cdot \ln|x-a| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(2)

$$\int \frac{B}{(x-b)^k} dx = B \cdot \left(\int u^{-k} du \right)_{u=x-b} = \frac{B}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-b)^{k-1}} + c, \quad c \in \mathbb{R}, k \geq 2$$

(3)

$$\begin{aligned}&\int \frac{Cx+D}{(x-c)^2+d^2} dx \\ =\ &\left(\int \frac{Cud + Cc + D}{u^2 d^2 + d^2} \cdot d\, du \right)_{u=\frac{x-c}{d}} \\ =\ &\frac{C}{2} \left(\int \frac{2u}{u^2+1} du \right)_{u=\frac{x-c}{d}} + \frac{Cc+D}{d} \left(\int \frac{du}{u^2+1} \right)_{u=\frac{x-c}{d}} \\ =\ &\left(\frac{C}{2} \ln\left|u^2+1\right| + \frac{Cc+D}{d} \arctan(u) \right)_{u=\frac{x-c}{d}} + \overline{c} \\ =\ &\frac{C}{2} \ln\left(\frac{(x-c)^2+d^2}{d^2} \right) + \frac{Cc+D}{d} \arctan\left(\frac{x-c}{d} \right) + \overline{c}, \quad \overline{c} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}&\int \frac{Cx+D}{[(x-c)^2+d^2]^k} dx \\ =\ &\left(\int \frac{Cud + Cc + D}{[u^2 d^2 + d^2]^k} \cdot d\, du \right)_{u=\frac{x-c}{d}} \\ =\ &\left(\int \frac{C'u + D'}{[u^2+1]^k} du \right)_{u=\frac{x-c}{d}} \\ =\ &C' \left(\underbrace{\int \frac{u}{[u^2+1]^k} du}_{=:I_1^{(k)}} \right)_{u=\frac{x-c}{d}} + D' \left(\underbrace{\int \frac{1}{[u^2+1]^k} du}_{=:I_2^{(k)}} \right)_{u=\frac{x-c}{d}}\end{aligned}$$

mit

$$C' := C \cdot d^{-2k+2} \text{ und } D' := (Cc + D) \cdot d^{-2k+1}$$

Berechnung von $I_1^{(k)}$ und $I_2^{(k)}$ ($u = \frac{x-c}{a}$):

$$I_1^{(k)} = \int \frac{u}{[u^2+1]^k} du = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{1}{1-k}(u^2+1)^{k-1} + \overline{c}, \overline{c} \in \mathbb{R} & \text{für } k > 1 \\ \frac{1}{2}\ln\left|u^2+1\right| + \overline{c}, \overline{c} \in \mathbb{R} & \text{für } k = 1 \end{cases}$$

$$I_2^{(k)} = \int \frac{1}{[u^2+1]^k} du = \begin{cases} \frac{2k-3}{2(k-1)} I_2^{(k-1)} \\ \quad + \frac{1}{2(k-1)} \frac{u}{(u^2+1)^{k-1}} & \text{für } k > 1 \\ \arctan(u) + \overline{c}, \quad c \in \mathbb{R} & \text{für } k = 1 \end{cases}$$

Beispiel 12.12. (Fortsetzung von Beispielen 12.9 und 12.11)

(1)

$$\int \frac{3x-1}{x^2+x} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{4}{x+1} dx = -1 \cdot \ln|x| + 4 \cdot \ln|x+1| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(2)

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^4 - x^2 - x - 2}{x^3(x^2+1)} dx \\ = & \int \frac{-2}{x^3} dx + \int \frac{-1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ = & \frac{-2}{-2} \cdot x^{-2} + \frac{-1}{-1} \cdot x^{-1} + \ln|x| + \arctan(x) + c \\ = & \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \ln|x| + \arctan(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

12.3 Das Riemann Integral

Definition 12.13. Sei $I := [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall.

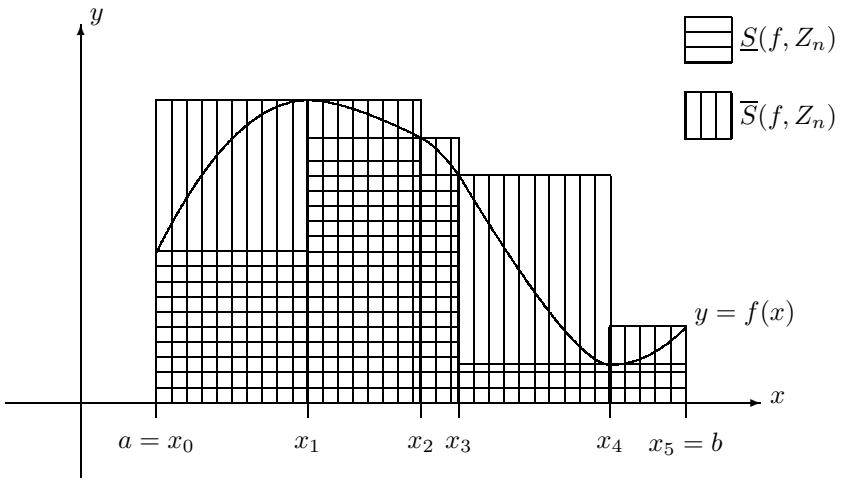
(1) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und seien $a =: x_0 < x_1 < \cdots < x_n := b$ Elemente aus I. Dann heißt $Z_n := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine *Zerlegung* von I.

(2) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine *beschränkte* Funktion und sei $Z_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von I. Außerdem sei

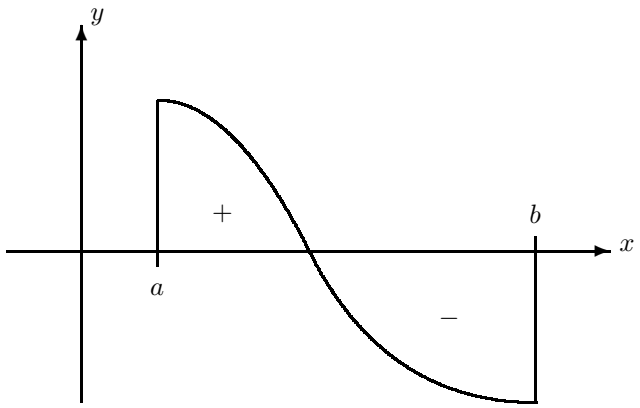
$$\begin{aligned} m_i(f, Z_n) &:= \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad i = 1, \ldots n \\ M_i(f, Z_n) &:= \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad i = 1, \ldots n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, Z_n) &:= \sum_{i=1}^{n} m_i(f, Z_n) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ \overline{S}(f, Z_n) &:= \sum_{i=1}^{n} M_i(f, Z_n) \cdot (x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

$\underline{S}(f, Z_n)$ heißt die zur Zerlegung Z_n gehörige *Untersumme* von f und $\overline{S}(f, Z_n)$ heißt die zur Zerlegung Z_n gehörige *Obersumme* von f.



Bemerkung. Bei einer „feinen“ Zerlegung approximieren Unter- und Obersumme den Flächeninhalt der Fläche, die im Intervall $[a, b]$ vom Funktionsgraphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird. Dabei erhalten Flächenstücke unterhalb der x-Achse ein negatives Vorzeichen.



Lemma 12.14. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und sei $Z_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Außerdem sei $m := \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ und $M := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Dann gilt:

$$m \cdot (b - a) \leq \underline{S}(f, Z_n) \leq \overline{S}(f, Z_n) \leq M \cdot (b - a).$$

Beweis. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$m \leq m_i(f, Z_n) \leq M_i(f, Z_n) \leq M,$$

und wegen $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = b - a$ folgt die Behauptung. □

Definition 12.15. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Eine Zerlegung Z_m von I heißt *Verfeinerung* einer Zerlegung Z_n von I, wenn $Z_n \subseteq Z_m$ ist.

Satz 12.16. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, und seien Z_n und Z_m Zerlegungen von $[a,b]$. Ist Z_m eine Verfeinerung von Z_n, so gilt:

$$\underline{S}(f,Z_n) \le \underline{S}(f,Z_m) \text{ und } \overline{S}(f,Z_n) \ge \overline{S}(f,Z_m).$$

Beweis.

Fall 1: $Z_n = Z_m$ ✓

Fall 2: $Z_n = \{x_0,\dots,x_n\} \subsetneqq Z_m$, und zwar sei zunächst $Z_m = Z_n \cup \{y\}$ mit einem $y \notin Z_n$

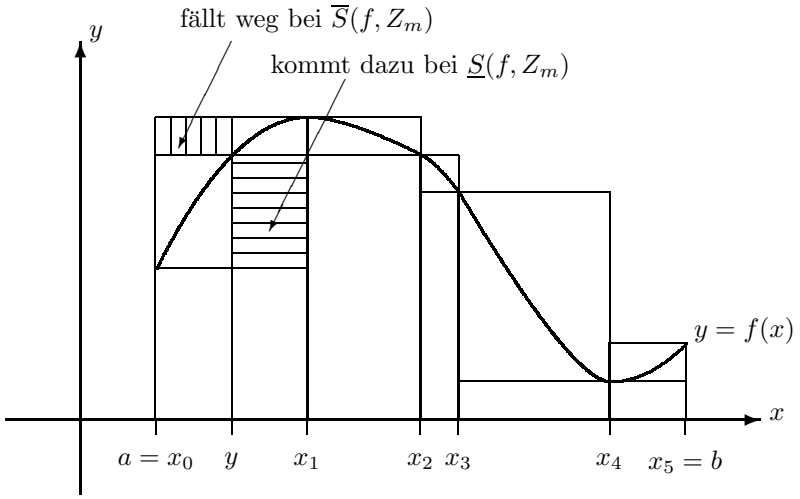
$$\Rightarrow \quad \exists k \in \{1,\dots,n\} : x_{k-1} < y < x_k$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcccl} M' & := & \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1},y]\} & \le & M_k(f,Z_n) \quad \text{und} \\ M'' & := & \sup\{f(x) : x \in [y,x_k]\} & \le & M_k(f,Z_n) \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \overline{S}(f,Z_m) &= \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} M_i(f,Z_n)(x_i - x_{i-1}) + M'(y - x_{k-1}) + M''(x_k - y) \\ \Rightarrow \qquad &\le \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} M_i(f,Z_n)(x_i - x_{i-1}) + M_k(f,Z_n)\,[(y - x_{k-1}) + (x_k - y)] \\ &= \overline{S}(f,Z_n). \end{aligned}$$

Ist $|Z_m \setminus Z_n| = p \ge 2$, so wendet man diese Überlegung p-mal an. Analog folgt $\underline{S}(f,Z_n) \le \underline{S}(f,Z_m)$.

□



Korollar 12.17. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und seien Z_n, Z_m Zerlegungen von $[a,b]$. Dann gilt: $\underline{S}(f,Z_n) \le \overline{S}(f,Z_m)$.

Beweis. $Z := Z_n \cup Z_m$ ist eine Verfeinerung von Z_n und von Z_m.

$$\Rightarrow \underline{S}(f,Z_n) \le \underline{S}(f,Z) \le \overline{S}(f,Z) \le \overline{S}(f,Z_m).$$

□

Bemerkung. Also ist $\{\underline{S}(f,Z) : Z \text{ Zerlegung von } I\}$ nach oben beschränkt, und $\{\overline{S}(f,Z) : Z \text{ Zerlegung von } I\}$ ist nach unten beschränkt.

Damit ist folgende Definition sinnvoll:

Definition 12.18. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann setzt man

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup\{\underline{S}(f, Z) : Z \text{ Zerlegung von } I\},$$
$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf\{\overline{S}(f, Z) : Z \text{ Zerlegung von } I\}.$$

$\underline{\int}_a^b f(x)dx$ heißt das *untere Riemann-Integral* von f über I, und $\overline{\int}_a^b f(x)dx$ heißt das *obere Riemann-Integral* von f über I.

Satz 12.19. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Beweis. Folgt direkt aus Korollar 12.17. □

Definition 12.20. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Wenn gilt, dass

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx,$$

so heißt f *integrierbar* (oder auch *Riemann-integrierbar*) auf $[a, b]$. Der gemeinsame Wert des oberen und unteren Riemann-Integrals von f über $[a, b]$ wird mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet und heißt *bestimmtes Integral* (oder *Riemann-Integral*) von f über $[a, b]$.

Beispiel 12.21.

(1) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = c \ \forall x \in [a, b]$ eine konstante Funktion. Dann gilt für jede Zerlegung Z von $[a, b]$

$$\underline{S}(f, Z) = c \cdot (b - a) = \overline{S}(f, Z),$$

also

$$\int_a^b f(x)dx = c \cdot (b - a),$$

d.h. f ist integrierbar.

(2)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \\ 0 & \text{für } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [a, b] \end{cases} \quad (\textit{Dirichlet'sche Sprungfunktion})$$

Da in jedem Intervall positiver Länge sowohl rationale als auch irrationale Zahlen liegen, gilt für jede Zerlegung Z von $[a, b]$:

$\underline{S}(f, Z) = 0 \cdot (b - a) = 0$ und $\overline{S}(f, Z) = 1 \cdot (b - a) = b - a$

$\Rightarrow \underline{\int}_a^b f(x)dx = 0 \neq b - a = \overline{\int}_a^b f(x)dx$

$\Rightarrow f$ ist *nicht* integrierbar.

Definition 12.22. Eine Folge $(Z_n)_{n\geq 1}$ von Zerlegungen eines Intervalls $[a,b]$ heißt *ausgezeichnete Zerlegungsfolge*, wenn die größte Länge eines Teilintervalls von Z_n für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert D.h. ist für $Z_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

$$l(z_n) := \max\{x_i - x_{i-1} : i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

so muss gelten: $\lim\limits_{n\to\infty} l(Z_n) = 0$.

Bemerkung.

(1) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so kann man das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx$ um so besser approximieren, je feiner die verwendete Zerlegung Z von $[a,b]$ gewählt wird.
Gilt insbesondere für eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge $(Z_n)_{n\geq 1}$

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, Z_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, Z_n),$$

so folgt:

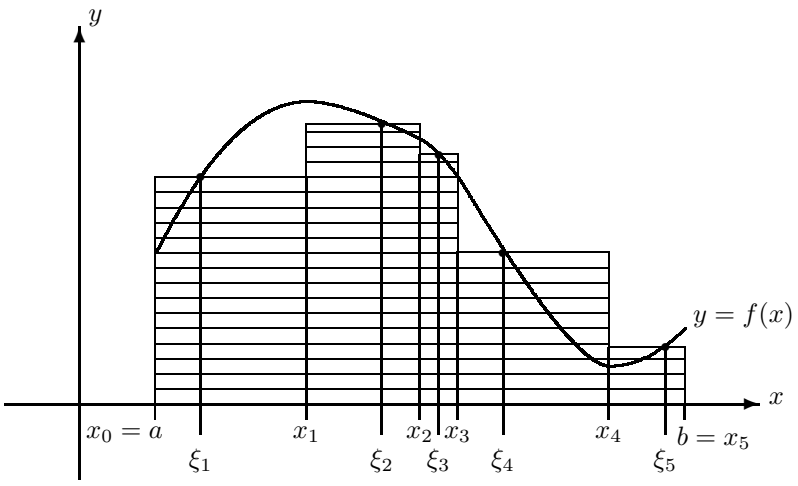
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, Z_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, Z_n).$$

(2) Im Falle der Integrierbarkeit kann man das Infimum bzw. Supremum der Funktionswerte in einem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ einer Zerlegung Z_n einer ausgezeichneten Zerlgegungsfolge $(Z_n)_{n\geq 1}$ durch einen beliebigen Funktionswert im betreffenden Teilintervall ersetzen. Ist nämlich $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ eine beliebige Zwischenstelle im Intervall $[x_{i-1}, x_i]$, so gilt

$$m_i(f, Z_n) \leq f(\xi_i) \leq M_i(f, Z_n)$$

und damit

$$\underline{S}(f, Z_n) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \overline{S}(f, Z_n).$$



Im Folgenden werden wir uns überlegen, unter welchen Voraussetzungen eine beschränkte Funktion auf einem Intervall $I = [a, b]$ integrierbar ist.

Satz 12.23. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Ist f monoton (steigend oder fallend) auf $[a, b]$, so ist f integrierbar auf $[a, b]$.

Beweis. OBdA sei f monoton steigend.
Sei Z_n eine Zerlegung von $[a, b]$ in n gleichlange Teilintervalle, $n \geq 1$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} l(Z_n) = \lim_{n\to\infty} \tfrac{b-a}{n} = 0$$

$\Rightarrow (Z_n)_{n\geq 1}$ ist eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge.

f monoton steigend

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad m_i(f, Z_n) &= \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_{i-1}) \\ M_i(f, Z_n) &= \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_i) \end{aligned}$$
$\forall i = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \underline{S}(f, Z_n) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(f, Z_n) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \cdot \tfrac{b-a}{n} \\ \overline{S}(f, Z_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(f, Z_n) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \tfrac{b-a}{n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{S}(f, Z_n) - \underline{S}(f, Z_n) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \tfrac{b-a}{n} = (f(b) - f(a)) \cdot \tfrac{b-a}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\overline{S}(f, Z_n) - \underline{S}(f, Z_n)\right) = \lim_{n\to\infty} (f(b) - f(a)) \cdot \tfrac{b-a}{n} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, Z_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, Z_n) = \int_a^b f(x)dx.$$

□

Satz 12.24. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Ist f auf $[a, b]$ stetig, so ist f integrierbar auf $[a, b]$.

Beweis. f stetig auf $[a, b] \overset{\text{Satz } 10.19}{\Rightarrow}$ f gleichmäßig stetig auf $[a, b]$.
Sei $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\varepsilon_n \geq 0$ $\forall n \geq 1$ und $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.
$\overset{f \text{ glm. stetig}}{\Rightarrow} \forall \varepsilon_n \quad \exists \delta_n = \delta_n(\varepsilon_n) > 0 :$

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon_n \quad \forall x, y \in [a, b], |y - x| < \delta_n.$$

Sei nun $(Z_n)_{n\geq 1}$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge mit $l(Z_n) < \delta_n$ $\forall n \geq 1$ (solche Zerlegungen lassen sich sicher finden).
Da eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ ein Minimum und ein Maximum annimmt, gilt:

$$\begin{aligned} m_i(f, Z_n) &= \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(\xi_i) \quad \text{mit } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \\ M_i(f, Z_n) &= \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(\nu_i) \quad \text{mit } \nu_i \in [x_{i-1}, x_i] \end{aligned}$$

$\forall i = 1, \ldots, n$.

$$\begin{aligned}
&\xi_i, \nu_i \in [x_{i-1}, x_i] \\
\Rightarrow \quad & |\nu_i - \xi_i| \leq x_i - x_{i-1} \leq l(Z_n) < \delta_n \quad \forall i =, \ldots, n \\
\Rightarrow \quad & M_i(f, Z_n) - m_i(f, Z_n) = f(\nu_i) - f(\xi_i) < \varepsilon_n \quad \forall i =, \ldots, n \\
\Rightarrow \quad & \overline{S}(f, Z_n) - \underline{S}(f, Z_n) = \sum_{i=1}^{n} (f(\nu_i) - f(\xi_i)) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
& \leq \varepsilon_n \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \\
& = \varepsilon_n \cdot (b - a).
\end{aligned}$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, ist

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, Z_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, Z_n) = \int_a^b f(x)dx.$$

□

Bemerkung. Man kann zeigen, dass eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ genau dann integrierbar ist, wenn die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen eine *Nullmenge* bildet. Nullmengen sind zum Beispiel alle endlichen Teilmengen $M = \{m_1, \ldots, m_n\} \subseteq [a, b]$, aber auch Mengen $M = \{m_1, m_2, \ldots\} \subseteq [a, b]$, die zwar unendlich viele, aber trotzdem noch *abzählbar* viele Elemente besitzen.

Die folgenden Eigenschaften integrierbarer Funktionen lassen sich leicht beweisen:

Satz 12.25. Sei $I := [a, b]$ und seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt:

(1) Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist auch $\lambda f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar, und es gilt:

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

(2) $f + g : I \to \mathbb{R}$ ist integrierbar, und es gilt:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(3) Ist $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, b]$, so gilt:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

(4) Ist $Z_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von I, so gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx.$$

Beweis. Folgt mehr oder weniger direkt aus der Definition (Übung). □

Bezeichnung.

(1) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann setzt man

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx.$$

(2) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $a \in I$. Dann ist

$$\int_a^a f(x)dx := 0.$$

Bemerkung. Damit ist

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in [a, b],$$

denn:

Fall 1: $x_1 < x_2 < x_3$: ✓ (Satz 12.25(4))

Fall 2: $x_1 < x_3 < x_2$:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx &= \int_{x_1}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_2} f(x)dx \\ &= \int_{x_1}^{x_3} f(x)dx - \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx \\ \Rightarrow \int_{x_1}^{x_3} f(x)dx &= \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx. \end{aligned}$$

Die übrigen Fälle ergeben sich analog.

Satz 12.26. *(Verallgemeinerter) (erster) Mittelwertsatz der Integralrechnung.* Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und

$$m := \inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \text{ und } M := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Außerdem sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, und es gelte $g(x) \geq 0$ oder $g(x) \leq 0$ $\forall x \in [a, b]$. Dann gibt es ein $\mu \in [m, M]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Ist dabei f auf $[a, b]$ stetig, so gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $\mu = f(\xi)$.

Beweis. Sei $g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$ und

$$\begin{array}{lccccl} & m & \leq & f(x) & \leq & M & \forall x \in [a, b] \\ \overset{g(x)\geq 0}{\Rightarrow} & m \cdot g(x) & \leq & f(x) \cdot g(x) & \leq & M \cdot g(x) & \forall x \in [a, b] \\ \overset{\text{Satz } 12.25}{\Rightarrow} & m \cdot \int_a^b g(x)dx & \leq & \int_a^b f(x) \cdot g(x)dx & \leq & M \cdot \int_a^b g(x), & \end{array}$$

und daraus folgt die erste Behauptung. Die zweite Behauptung folgt direkt aus dem Zwischenwertsatz von Bolzano, Satz 10.25. Der Fall $g(x) \leq 0$ $\forall x \in [a, b]$ folgt analog. □

Satz 12.27. *(Erster) Mittelwertsatz der Integralrechnung.*
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und

$$m := \inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \text{ und } M := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

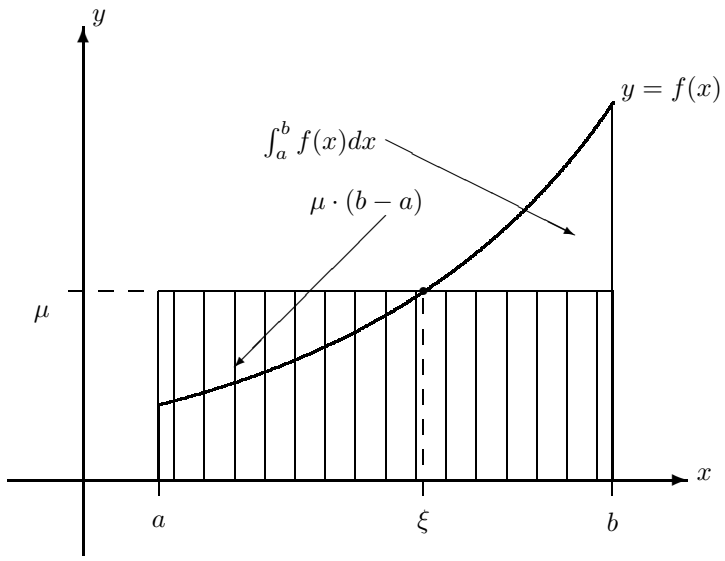
Dann gibt es ein $\mu \in [m, M]$ mit

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \mu.$$

Ist dabei f auf $[a, b]$ stetig, so gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $\mu = f(\xi)$.

Beweis. Setze $g(x) = 1 \ \forall x \in [a, b]$ in Satz 12.26. □

Interpretation:



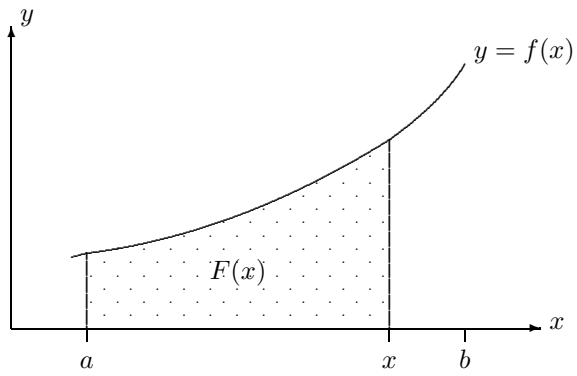
12.4 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

In diesem Abschnitt werden wir den Zusammenhang zwischen Stammfunktion und Riemann-Integral klären.

Definition 12.28. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ intgrierbar. Dann heißt die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

die *Flächenfunktion* zu f.



Satz 12.29. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ intgrierbar, und sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ die Flächenfunktion zu f.

(1) $\int_{x'}^{x} f(t)dt = F(x) - F(x') \quad \forall x, x' \in [a, b]$

(2) F ist auf $[a, b]$ stetig.

Beweis.

(1)
$$\begin{aligned} \int_{x'}^{x} f(t)dt &= \int_{x'}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{a}^{x} f(t)dt - \int_{a}^{x'} f(t)dt \\ &= F(x) - F(x'). \end{aligned}$$

(2) f integrierbar $\Rightarrow$ f beschränkt

$$\Rightarrow \exists M > 0 : \quad |f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b].$$

Sei $x_0 \in [a, b]$.

$$\Rightarrow \quad |F(x) - F(x_0)| \overset{(1)}{=} \left|\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right| \overset{\text{Satz } 12.27}{\leq} M \cdot |x - x_0| \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) := \tfrac{\varepsilon}{M} > 0 :$$

$$|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b], |x - x_0| < \delta.$$

□

Satz 12.30. *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, und sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ die Flächenfunktion zu f. Sei $x_0 \in [a, b]$, und sei f stetig in x_0. Dann ist F in x_0 differenzierbar, und es gilt:

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Bemerkung. Ist f stetig in $[a, b]$, so ist damit F eine Stammfunktion von f.

Beweis. von Satz 12.30:
Sei $\varepsilon > 0$.
f stetig in $x_0 \quad \Rightarrow \quad \exists \delta > 0 : \quad |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in [a,b], |x - x_0| < \delta.$
Für jedes solche x mit $x \neq x_0$ folgt aus Satz 12.29 (1):

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \frac{1}{|x - x_0|} \cdot \left| \int_{x_0}^{x} f(t)dt - f(x_0) \cdot |x - x_0| \right| \\
&= \frac{1}{|x - x_0|} \cdot \left| \int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(x_0)dt \right| \\
&= \frac{1}{|x - x_0|} \cdot \left| \int_{x_0}^{x} f(t) - f(x_0)dt \right| \\
&\overset{|x-x_0|<\delta}{\leq} \frac{1}{|x - x_0|} \cdot |x - x_0| \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

□

Aus Satz 12.30 folgt direkt das folgende für die Berechnung von bestimmten Integralen $\int_a^b f(x)dx$ zentrale Ergebnis:

Satz 12.31. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann besitzt f eine Stammfunktion, und ist F eine Stammfunktion von f, so gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b =: [F(x)]_a^b .$$

Beweis. f stetig $\Rightarrow$ f integrierbar

$\overset{\text{Satz } 12.30}{\Rightarrow}$ die Flächenfunktion $F_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von f

$\overset{\text{Satz } 12.2}{\Rightarrow}$ Für jede Stammfunktion F von f gilt: $F = F_0 + c$, $c \in \mathbb{R}$

$\overset{\text{Satz } 12.29(1)}{\Rightarrow}$ $\int_a^b f(t)dt = F_0(b) - F_0(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a).$

□

Beispiel 12.32.

(1)

$$\int_a^b c \; dx = c \cdot x|_a^b = cb - ca = c(b - a) \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

(2)

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx$$

Nebenrechnung:

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \left(\int u du\right)_{u=\ln(x)} = \frac{1}{2}\left(\ln(x)\right)^2 + c, \quad c \in \mathbb{R},\ x > 0$$

$$\Rightarrow \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx = \frac{1}{2}\left(\ln(x)\right)^2\Big|_1^e = \frac{1}{2}\left(\ln(e)\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\ln(1)\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

(3)

$$\int_0^\pi \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1+\cos(2x))dx = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin(2x))\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Satz 12.33. *Integration durch Substitution für bestimmte Integrale.*
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, und sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\varphi([a,b]) \subseteq [c,d]$. Dann ist

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f
$\Rightarrow F \circ \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar, und es gilt:

$$(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi',$$

d.h. $F \circ \varphi$ ist eine Stammfunktion von $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a) \\ &= \int_a^b (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x)dx \\ &= \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx. \end{aligned}$$

□

Beispiel 12.34.

$$\int_1^2 x \cdot \sqrt{1+x^2}dx$$

Substitution: $u = \varphi(x) = 1 + x^2$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2x} \\ \varphi(a) = \varphi(1) = 1 + 1 = 2 \\ \varphi(b) = \varphi(2) = 1 + 4 = 5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 x \cdot \sqrt{1+x^2}dx = \int_2^5 \frac{1}{2}\sqrt{u}du = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_2^5 = \frac{1}{3}(5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}) = \frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}).$$

12.5 Uneigentliche Integrale

Bei der Definition des Riemann-Integrals haben wir angenommen, dass das Integrationsintervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und endlich ist, und dass die zu integrierende Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ beschränkt ist.
Wir werden im Folgenden Fälle betrachten, in denen man von diesen Annahmen abweichen kann und diese unter dem Begriff des *uneigentlichen Integrals* zusammenfassen.

1. Eine Integrationsgrenze ist unendlich.

Definition 12.35. Sei $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Intervall $[a,R]$, $a < R < \infty$, integrierbar ist. Falls der Grenzwert $\lim\limits_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx$ existiert, heißt das Integral $\int_a^\infty f(x)dx$ *konvergent*, und man setzt

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx.$$

Beispiel 12.36. Sei $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\int_1^\infty f(x)dx \text{ konvergiert} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

Beweis. Sei $1 < R < \infty$

$$\Rightarrow \int_1^R \tfrac{1}{x^\alpha}dx = \left\{ \begin{array}{ll} \ln(x)\Big|_1^R & \text{für } \alpha = 1 \\ \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\Big|_1^R & \text{für } \alpha \neq 1 \end{array} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{array}{ll} \ln(R) & \text{für } \alpha = 1 \\ \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{R^{\alpha-1}}\right) & \text{für } \alpha \neq 1 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ Für $\alpha \leq 1$ existiert $\lim\limits_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^\alpha}dx$ nicht, und
für $\alpha > 1$ gilt:

$$\lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{R^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{\alpha-1},$$

da $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{R^{\alpha-1}} = 0$ für $\alpha > 1$.

□

2. Der Integrand ist an einer Integrationsgrenze nicht definiert.

Definition 12.37. Sei $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Teilintervall $[a+\varepsilon, b]$ mit $0 < \varepsilon < b-a$ integrierbar ist. Falls der Grenzwert $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ existiert, heißt das Integral $\int_a^b f(x)dx$ *konvergent* und man setzt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Beispiel 12.38. Sei $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\int_0^1 f(x)dx \text{ konvergiert} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1.$$

Beweis. Sei $\alpha < 1$ und $0 < \varepsilon < 1$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \int_\varepsilon^1 \tfrac{1}{x^\alpha} dx = \tfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\Big|_\varepsilon^1 = \tfrac{1}{1-\alpha}\left(1 - \tfrac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right) = \tfrac{1}{1-\alpha}\left(1-\varepsilon^{1-\alpha}\right)\\
&\Rightarrow \quad \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \tfrac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \tfrac{1}{1-\alpha}\left(1-\varepsilon^{1-\alpha}\right) = \tfrac{1}{1-\alpha},\\
&\qquad \text{da } \lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^{1-\alpha} = 0 \text{ für } \alpha < 1.
\end{aligned}$$

Ist $\alpha \geq 1$, so sieht man leicht, dass $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ nicht konvergent ist (Übung). □

3. Beide Integrationsgrenzen sind kritisch.

Definition 12.39. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine Funktion, die über jedem Teilintervall $[A,B] \subset (a,b)$ integrierbar ist, und sei $c \in (a,b)$. Falls die beiden uneigentlichen Integrale $\int_a^c f(x)dx$ und $\int_c^b f(x)dx$ konvergieren, heißt $\int_a^b f(x)dx$ *konvergent* und man setzt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Bemerkung. Man kann leicht zeigen, dass diese Definition unabhängig von der Auswahl von $c \in (a,b)$ ist (Übung).

Beispiel 12.40.

(1) $\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ *nicht* konvergent, da für $c = 1$ gilt: $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$ konvergiert nicht, oder $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ konvergiert nicht.

(2) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$, denn

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \tfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-1+\varepsilon}^0 \tfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \tfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\arcsin(x)|_{-1+\varepsilon}^0\right) + \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\arcsin(x)|_0^{1-\varepsilon}\right)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(-\arcsin(-1+\varepsilon)\right) + \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\arcsin(1-\varepsilon)\right)\\
&= -\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) + \tfrac{\pi}{2} = \pi.
\end{aligned}$$

(3) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi$, denn:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty \tfrac{dx}{1+x^2} &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^0 \tfrac{dx}{1+x^2} + \lim_{R\to\infty} \int_0^R \tfrac{dx}{1+x^2}\\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\arctan(x)|_{-R}^0\right) + \lim_{R\to\infty} \left(\arctan(x)|_0^R\right)\\
&= \lim_{R\to\infty} \left(-\arctan(-R)\right) + \lim_{R\to\infty} \left(\arctan(R)\right)\\
&= -\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) + \tfrac{\pi}{2} = \pi.
\end{aligned}$$

4. Das Integralvergleichskriterium von Cauchy.

Mit Hilfe von uneigentlichen Integralen können wir jetzt ein neues Konvergenzkriterium für Reihen herleiten:

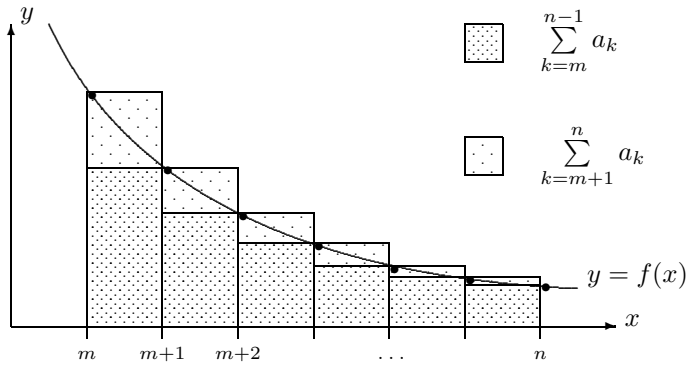
Satz 12.41. Sei $m \in \mathbb{N}$ und sei $f : [m, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige, monoton fallende Funktion mit $f(x) > 0 \ \forall x \in [m, \infty)$.

Außerdem sei $a_k := f(k) \ \forall k = m, m+1, \ldots$. Dann haben die Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ und das uneigentliche Integral $\int_m^{\infty} f(x)dx$ dasselbe Konvergenzverhalten.

Beweis. Für alle $n > m$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k < \int_m^n f(x)dx < \sum_{k=m}^{n-1} a_k,$$

denn:



und damit folgt die Behauptung. □

Beispiel 12.42. Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$
$\Rightarrow f'(x) = -\alpha x^{-\alpha-1} < 0 \ \forall x \in [1, \infty)$
$\Rightarrow f$ ist monton fallend auf $[1, \infty)$, stetig und positiv.
Das Integralvergleichskriterium ergibt:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\alpha-1} & \text{für} \quad \alpha > 1 \\ \infty & \text{für} \quad \alpha \leq 1 \end{array} \right\} \text{(vgl. Beispiele 12.36 und 12.38)}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \left\{ \begin{array}{ll} \text{ist konvergent für} & \alpha > 1 \\ \text{ist divergent für} & \alpha \leq 1. \end{array} \right.$$

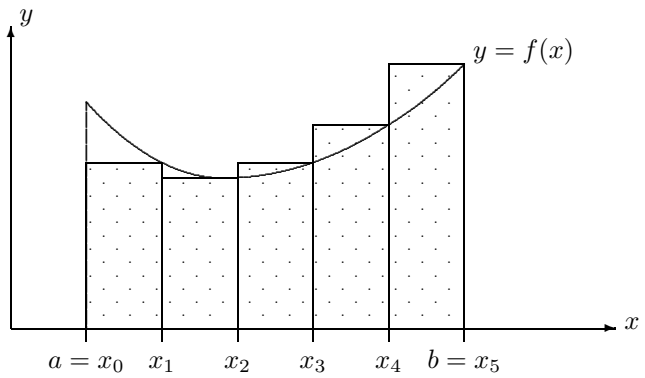
12.6 Numerische Integration

In diesem Abschnitt nehmen wir stets an, dass $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist. Um $\int_a^b f(x)dx$ numerisch zu berechnen, kann man das Intervall $[a, b]$ in $n \geq 1$ Teilintervalle der Länge $h := \frac{b-a}{n}$ einteilen, und erhält mit

$$x_k := a + k \cdot h, \quad y_k := f(x_k)$$

die *Rechteckregel* zur Approximation von $\int_a^b f(x)dx$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot h$$



Der Approximationsfehler ist hierbei im Allgemeinen aber so groß, dass erst ein großes n brauchbare Resultate liefert; ein großes n führt aber andererseits zu großen Rundungsfehlern.
Wir werden deshalb im Folgenden Verfahren betrachten, die f auf den Teilintervallen durch Polynome approximieren, die wiederum leicht zu integrieren sind.

Definition 12.43. Eine endliche Rechenvorschrift für die Berechnung einer Zahl Q, so dass gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = Q + R$$

mit $|R| < \varepsilon$ bei vorgegebener Fehlerschranke $\varepsilon > 0$, heißt eine *Quadraturformel*.

Ansatz: Unterteile $[a, b]$ durch $n \geq 1$ *Stützstellen*

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n \leq b$$

mit *Stützwerten* $y_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Newton-Cotes-Quadraturformeln:
Approximiere f durch das *Lagrange-Interpolationspolynom* $P_n(x)$ mit den Knotenpunkten (x_k, y_k), $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

mit

$$L_k(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n$$

Durch Integration von $P_n(x)$ erhält man die Quadraturformel:

$$Q_n := \int_a^b P_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \underbrace{\int_a^b L_k(x)dx}_{\substack{\text{hängt nur von} \\ x_0, x_1, \ldots, x_n \text{ ab!}}} =: (b-a) \cdot \sum_{k=0}^{n} w_k y_k$$

Bemerkung.

(1) Der Grad des Interpolationspolynoms $P_n(x)$ ist höchstens n und steht im direkten Zusammenhang zur Anzahl der gewählten Stützstellen.

(2) Das Polynom $P_n(x)$ verläuft tatsächlich durch alle Knotenpunkte (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$, denn für alle $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ gilt:

$$P_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \underbrace{\left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{(x_i - x_j)}{(x_k - x_j)} \right)}_{= \begin{cases} 0 & \text{für} \quad k \neq i \\ 1 & \text{für} \quad k = i \end{cases}} = y_i \cdot 1 = y_i \qquad \checkmark$$

(3) Man kann relativ leicht zeigen, dass $P_n(x)$ durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt ist.

Definition 12.44. Die nur von den Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ und von $b - a$ abhängigen Größen

$$\omega_k := \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b L_k(x)dx, \quad k = 0, \ldots, n$$

heißen *Integrationsgewichte* der Newton-Cotes Quadraturformel Q_n zu den Stützstellen x_k.

Bemerkung. Ist die gegebene Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ selbst ein Polynom vom Grad höchstens n, so liefert die Newton-Cotes-Quadraturformel offensichtlich den exakten Wert für $\int_a^b f(x)dx$. Im allgemeinen Fall erhält man durch Q_n eine Näherung von $\int_a^b f(x)dx$ mit dem Fehler

$$R_n[f] := \int_a^b f(x)dx - Q_n = \int_a^b f(x)dx - (b-a) \cdot \sum_{k=0}^{n} \omega_k y_k.$$

Wir werden im Folgenden aber auch Beispiele finden, in denen Q_n auch noch für Polynome vom Grad $> n$ den exakten Integralwert liefert.

Definition 12.45. Eine Newton-Cotes-Quadraturformel Q_n besitzt den *Genauigkeitsgrad* $m \in \mathbb{N}$, wenn Q_n alle Polynome bis zum Grad m exakt integriert, wobei m mit dieser Eigenschaft maximal ist.

Lemma 12.46. Eine Newton-Cotes-Quadraturformel Q_n hat den Genauigkeitsgrad $m \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn gilt:

$$R_n[x^j] = 0 \quad \forall j = 0, 1, \ldots, m \text{ und } R_n[x^{m+1}] \neq 0.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus der Linearität des Fehlerfunktionals $R_n[f]$, d.h. dass gilt:

$$R_n[f + g] = R_n[f] + R_n[g].$$

□

Zusammenfassend erhält man:

Satz 12.47. Gegeben seien $n+1$ Stützstellen $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$. Dann gibt es genau eine interpolierende Quadraturformel

$$Q_n = (b-a) \cdot \sum_{k=0}^{n} \omega_k f(x_k)$$

mit

$$\omega_k := \frac{1}{b-a} \int_a^b L_k(x)dx \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

deren Genauigkeit mindestens n ist.

In der Praxis wählt man meistens *äquidistante Stützstellen* durch

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k := a + k \cdot h, \quad y_k := f(x_k) \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n.$$

Definition 12.48. Die Quadraturformeln der Form

$$Q_n := h \cdot \sum_{k=0}^{n} \alpha_k y_k$$

mit

$$\alpha_k := \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{(t-j)}{(k-j)} dt \quad \forall 0, 1, \ldots, n$$

heißen *geschlossene Newton-Cotes-Quadraturformeln*, da sie sowohl Anfangs- als auch Endpunkt des Intervalls $[a, b]$ als Stützstellen verwenden.

Bemerkung. Die Integrationsgewichte α_k ergeben sich aus ω_k durch die Substitution $x = a + ht$:

$$w_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)} dx;$$

Substitution: $x = a + ht \Rightarrow \frac{dx}{dt} = h \Rightarrow dx = h\, dt$
$\Rightarrow t = \varphi(x) = \frac{x-a}{h} \Rightarrow \varphi(a) = 0,\ \varphi(b) = \frac{b-a}{h} = n$

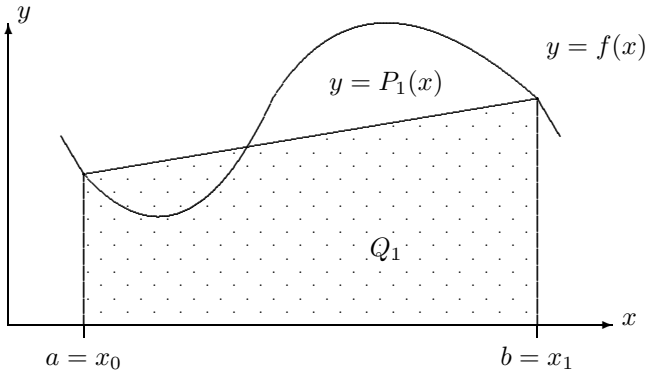
$$\begin{aligned} \Rightarrow \omega_k &= \frac{1}{b-a} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{((a+th)-(a+jh))}{((a+kh)-(a+jh))} \cdot h dt \\ &= \frac{h}{b-a} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{(t-j)}{(k-j)} dt \\ &= \frac{1}{n} \cdot \alpha_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Beispiel 12.49.

(1) $n = 1$: *Trapez-Regel*
$\Rightarrow P_1(x)$ ist die Gerade durch die zwei Knotenpunkte

$$(a, f(a)), \quad (b, f(b))$$

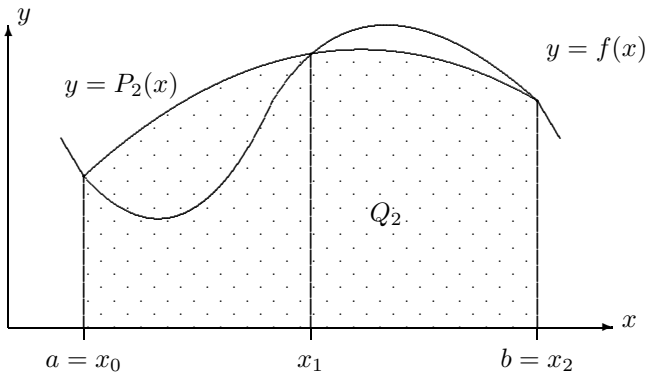
$$\Rightarrow Q_1 = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$



(2) $n = 2$: *Simpson-Regel*
$\Rightarrow P_2(x)$ ist eine quadratische Parabel durch die drei Knotenpunkte

$$(a, f(a)), \quad \left(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2})\right), \quad (b, f(b))$$

$$\Rightarrow Q_2 = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)) = \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + y_2)$$



Für das Fehlerfunktional gilt in diesem Fall:

$$R_2[x^3] = \int_a^b x^3 dx - \frac{b-a}{6} \cdot \left(a^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + b^3\right) = \cdots = 0,$$

aber $R_2[x^4] \neq 0$.
$\Rightarrow$ Die Simpson-Regel hat den Genauigkeitsgrad $m = 3$, obwohl für ihre Herleitung nur ein Polynom 2. Grades verwendet wurde.

Bemerkung.

(1) Man kann zeigen, das für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ der Quadraturfehler für die Trapezregel durch

$$R_1[f] = -\frac{1}{12h^3} \cdot f^{(2)}(\xi) \quad \text{mit } a < \xi < b$$

gegeben ist.

(2) Für die Simpson-Regel erhält man bei viermal stetig differenzierbarer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$R_2[f] = -\frac{1}{90h^5} \cdot f^{(4)}(\xi) \quad \text{mit } a < \xi < b.$$

(3) Da für $n \geq 8$ negative Integrationsgewichte α_k auftreten, werden die Newton-Cotes-Formeln für $n \geq 8$ numerisch unbrauchbar.

Summierte Newton-Cotes-Quadraturformeln:
Da für „große“ Intervalle $[a, b]$ die Intervalllänge $h = \frac{b-a}{n}$ für kleine Werte von n in der Regel zu groß ist, um eine genügend gute Approximation von $\int_a^b f(x)dx$ zu erreichen, zerlegt man häufig das Intervall $[a, b]$ in äquidistante Teilintervalle I_j und wendet die Newton-Cotes Formel auf jedes dieser Teilintervalle an.

Beispiel 12.50. *Verallgemeinerte (oder summierte) Trapez-Regel.*
Sei $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und seien $h := \frac{b-a}{N}$, $x_k := a + kh$, $y_k = f(x_k)$, $\forall k = 0, 1, \ldots, N$;

$$I_k := [x_{k-1}, x_k] \quad \forall k = 0, 1, \ldots, N.$$

Auf jedem Teilintervall I_k wenden wir die Trapez-Regel an:

$$Q_{1k} := \frac{h}{2}(y_{k-1} + y_k)$$

Summation über $k = 1, 2, \ldots, N$ liefert:

$$T(h) := \sum_{k=1}^{N} Q_{1k} = \frac{h}{2}\left(y_0 + \left(2\sum_{k=2}^{N-1} y_k\right) + y_N\right)$$

Summiert mann die Quadraturfehler der Teilintervalle, so erhält man die Fehlerabschätzung

$$R_1[f] = \int_a^b f(x)dx - T(h) = \frac{(b-a)}{12} \cdot h^2 \cdot f^{(2)}(\xi) \quad \text{mit } a < \xi < b.$$

Beispiel 12.51. *Verallgemeinerte (oder summierte) Simpson-Regel.*
Sei $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und seien $h := \frac{b-a}{2N}$, $x_k := a + kh$, $y_k = f(x_k)$, $\forall k = 0, 1, \ldots, N$;

$$I_k := [x_{2(k-1)}, x_{2k}] \quad \forall k = 1, 2, \ldots, N.$$

Auf jedem Teilintervall I_k wenden wir die Simpson-Regel an:

$$Q_{2k} := \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k})$$

Summation über $k = 1, 2, \ldots, N$ liefert:

$$S(h) := \sum_{k=1}^{N} Q_{2k} = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + \left(2\sum_{k=1}^{N-1}(y_{2k} + 2y_{2k+1})\right) + y_{2N}\right)$$

Der Quadraturfehler ergibt sich als

$$R_2[f] = \int_a^b f(x)dx - S(h) = -\frac{(b-a)}{180} \cdot h^4 \cdot f^{(4)}(\xi) \quad \text{mit } a < \xi < b.$$

Beispiel 12.52. Mit $N = 10$ soll $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ approximiert werden.
Als Knotenpunkte erhält man:

x_k	y_k
1.0	1.0
1.1	0.9090909
1.2	0.8333333
1.3	0.7692308
1.4	0.7142857
1.5	0.6666667
1.6	0.625
1.7	0.5882353
1.8	0.5555556
1.9	0.5263158
2.0	0.5

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Rechteckregel:} & \sum_{k=1}^{10} y_k \cdot \frac{1}{10} & = & 0.668771 \\ \text{Trapez-Regel:} & S(h) & = & 0.693771 \\ \text{Simpson-Regel:} & T(h) & = & 0.693150 \end{cases}$$

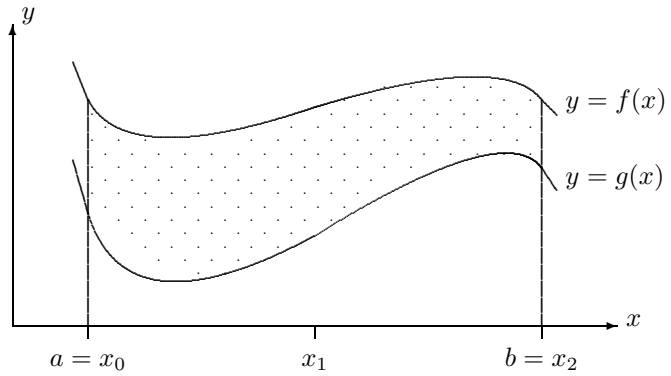
Der richtige Wert ist mit sechs Dezimalstellen: 0.693147.

12.7 Anwendungen der Integralrechnung

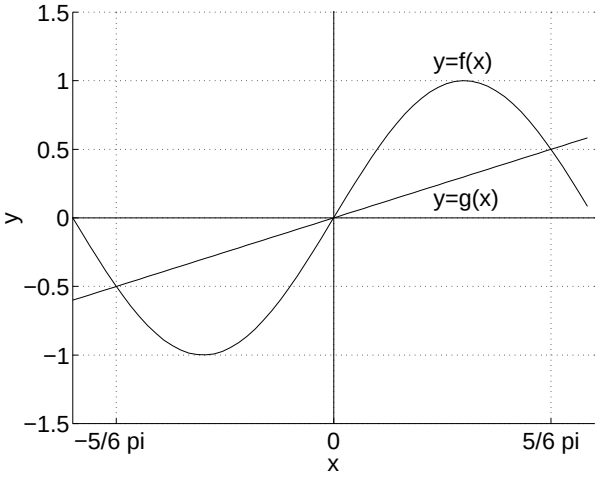
Flächen

Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen, so ist der Flächeninhalt zwischen den Funktionsgraphen von f und g gegeben durch

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx, \quad \text{falls } f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b].$$



Beispiel 12.53. Gesucht ist der Inhalt A des endlichen Flächenstücks, das von den Funktionsgraphen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \frac{3x}{5\pi}$ eingeschlossen wird.



Schritt 1: Bestimmung der Schnittpunkte von f und g:

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x) = \frac{3x}{5\pi} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-\frac{5}{6}\pi, 0, \frac{5}{6}\pi\},$$

denn:
Wertetabelle:

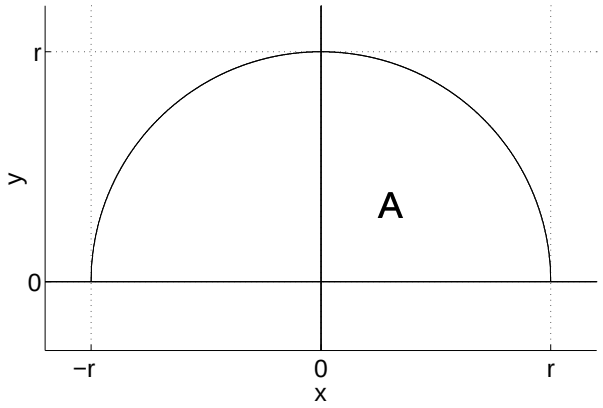
x	$-\frac{5}{6}\pi$	0	$\frac{5}{6}\pi$	2π
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
$g(x)$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{5}$

$\rightsquigarrow$ keine weiteren Schnittpunkte für $x \geq 2\pi$

Schritt 2:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{5}{6}\pi}^{0} \left(\frac{3x}{5\pi} - \sin(x)\right) dx \quad + \quad \int_{0}^{\frac{5}{6}\pi} \left(\sin(x) - \frac{3x}{5\pi}\right) dx \\ &= \left[\frac{3x^2}{10\pi} + \cos(x)\right]_{-\frac{5}{6}\pi}^{0} \quad + \quad \left[-\cos(x) - \frac{3x^2}{10\pi}\right]_{0}^{\frac{5}{6}\pi} \\ &= \left(0 + 1 - \frac{5}{24}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad + \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{24}\pi + 1 + 0\right) \\ &= 2 + \sqrt{3} - \frac{5}{12}\pi \end{aligned}$$

Beispiel 12.54. Bestimmung des Flächeninhalts A eines Halbkreises mit Radius $r > 0$ mit Mitteln der Integralrechnung:



Aus der Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ folgt für den oberen Halbkreisbogen:

$$y = +\sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in [-r, r]$$

$$\Rightarrow A = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx = 2r \cdot \int_0^r \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}dx$$

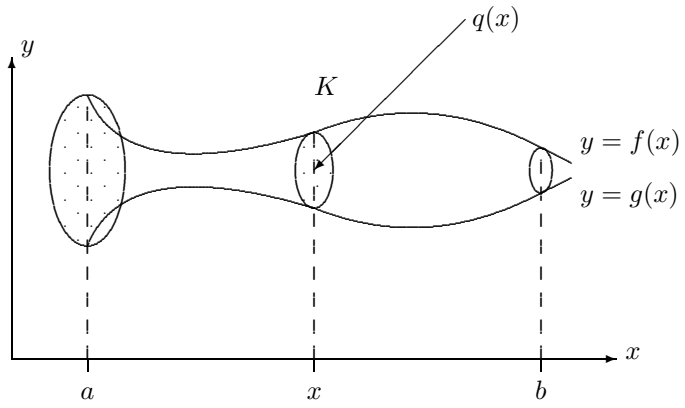
Substitution: $x = r \cdot \sin(u) \Rightarrow \frac{dx}{du} = r \cdot \cos(u) \Rightarrow dx = r \cdot \cos(u)du$
und $u = \varphi(x) = \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) \Rightarrow \varphi(0) = \arcsin(0) = 0$, $\varphi(r) = \arcsin(\frac{r}{r}) = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow A &= 2 \cdot r \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(u)} \cdot r \cdot \cos(u)du \\
&= 2 \cdot r^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(u)} \cdot \cos(u)du \\
&= 2 \cdot r^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)du \\
&= r^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2u))du \\
&= r^2 \cdot \left[u + \frac{1}{2}\sin(2u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad = \quad \frac{\pi}{2}r^2.
\end{aligned}$$

Volumenbestimmung

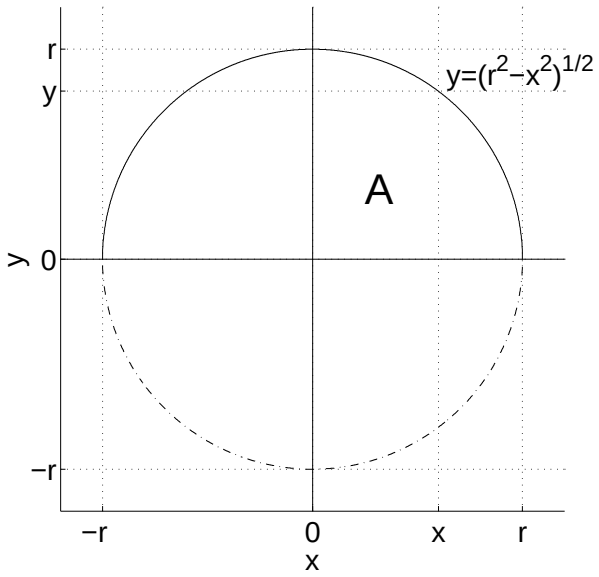
Hat die Schnittfläche eines Körpers K mit der Ebene $x = c$, $c \in \mathbb{R}$ den Flächeninhalt $q(x)$, so kann man das Volumen V von K für $a \leq x \leq b$ nach dem sogenannten *Cavalier'schen Prinzip* berechnen:

$$V = \int_a^b q(x)dx$$



Beispiel 12.55. Bestimmung des Volumens einer Kugel K mit Radius $r > 0$ nach dem Cavalier'schen Prinzip:
Die Schnittfläche der Kugel mit Mittelpunkt $(0, 0)$ mit der Ebene $x = c$ hat den Flächeninhalt

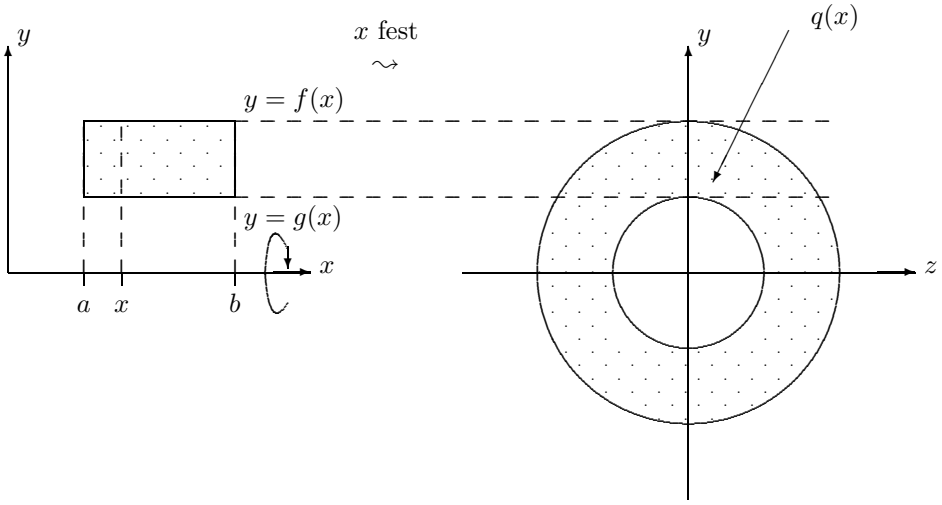
$$q(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2).$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow V &= \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)dx \\ &= \pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right)\right) = \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

Die Kugel ist ein Spezialfall eines *Rotationskörpers* R, der entsteht, wenn man eine gegebene Fläche um die x-Achse oder die y-Achse rotiert.

Rotation um die x-Achse



Sei $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a,b]$.
$\Rightarrow$ der Flächeninhalt der Schnittfläche von R mit der Ebene $x = c$, $c \in \mathbb{R}$, ist gegeben durch:

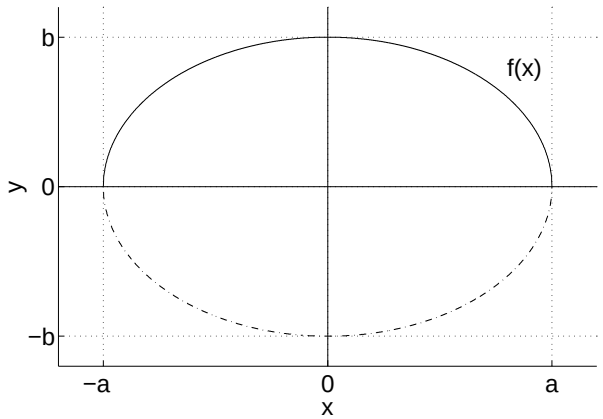
$$q(x) = \pi(f(x))^2 - \pi(g(x))^2 = \pi(f^2(x) - g^2(x)) \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow V = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right) dx$$

Beispiel 12.56. Bestimmung des Volumens des Rotationskörpers, der durch Rotation der Ellipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

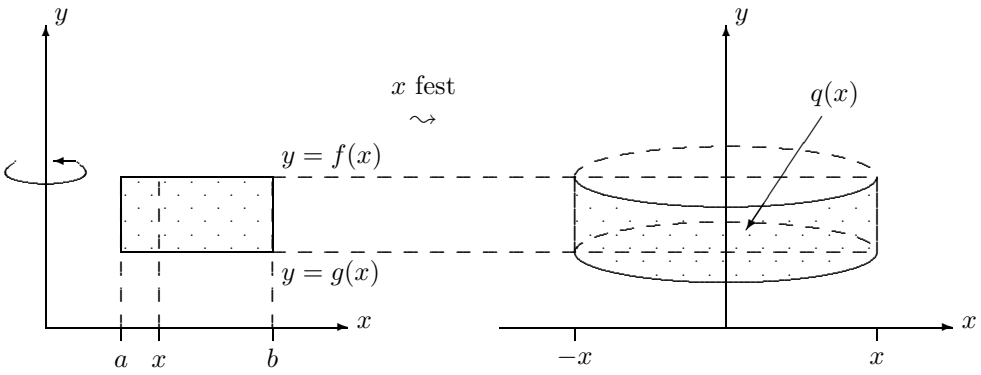
um die x-Achse entsteht:



$$f(x) = \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}, \quad g(x) = 0, \quad x \in [-a,a]$$

$$\Rightarrow V = \pi \int_{-a}^{a} b^2(1-\frac{x^2}{a^2})dx$$
$$= \pi \cdot b^2 \cdot \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a} = \pi \cdot b^2 \cdot \left(a - \frac{a}{3} - \left(-a + \frac{a}{3}\right)\right) = \frac{4}{3}\pi b^2 a.$$

Rotation um die y-Achse

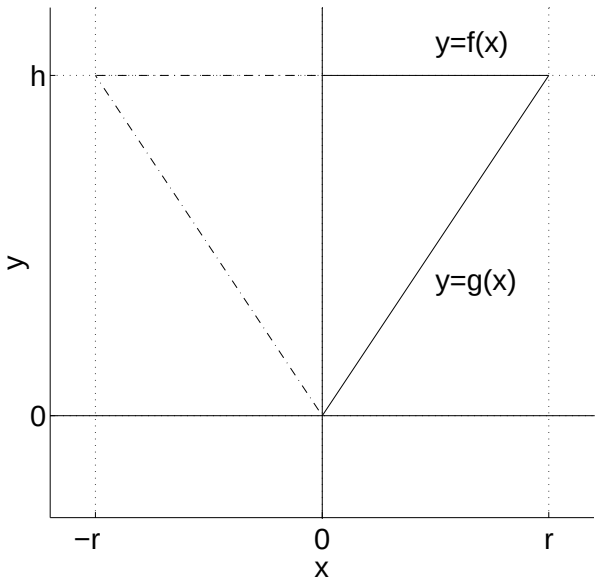


Sei $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a,b]$
$\Rightarrow$ Für festes x erhält man einen Zylindermantel mit Flächeninhalt

$$q(x) = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot (f(x) - g(x)) \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow V = 2 \cdot \pi \cdot \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x))dx$$

Beispiel 12.57. Bestimmung des Volumens eines geraden Kreiskegels der Höhe h und Basisradius $r > 0$:



$$f(x) = h, \quad g(x) = \frac{h}{r} \cdot x, \quad x \in [0, r]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V &= 2\pi \cdot \int_0^r x \cdot (h - \frac{h}{r} \cdot x) dx &&= 2\pi h \cdot \int_0^r (x - \frac{x^2}{r}) dx \\ &= 2\pi h \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3r} \right]_0^r &&= 2\pi h \cdot \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3r} \right) = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h. \end{aligned}$$

Integral-Restglied der Taylor-Formel

Satz 12.58. *Taylor-Formel und Integral-Restglied* (vgl. Satz 11.30).
Sei $f \in C^{n+1}([a, b])$. Dann gilt für jedes feste $x_0 \in [a, b]$:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}_{T_n(x)} + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt}_{R_n(x, x_0)}$$

Bemerkung. Damit hat man eine alternative Darstellung des Restglieds $R_n(x, x_0)$ im Vergleich zur Langrange'schen Darstellung als

$$R_n(x, x_0) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \quad \text{mit } \xi = x_0 + \Theta(x - x_0), \quad \Theta \in (0, 1).$$

Beweis. von Satz 12.58.
Wir wenden den verallgemeinerten ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung, Satz 12.26, auf das Integral-Restglied an. Danach gibt es ein

$$\xi \in [x_0, x], \ \xi := x_0 + \Theta(x - x_0), \quad \Theta \in [0, 1]$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} \underbrace{(x - t)^n}_{\overline{g}(x)} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{\overline{f}(x)} dt &= f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{1}{n!} \cdot \int_{x_0}^{x} (x - t)^n dt \\ &= f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{1}{n!} \cdot \int_{x - x_0}^{0} u^n \cdot (-1) du \\ &= f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left[-\frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_{x - x_0}^{0} \\ &= f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Da rechts das Restglied von Lagrange steht, folgt mit Satz 12.26 die Behauptung. □

Bemerkung. Durch partielle Integration des Integral-Restglieds folgt die triviale Aussage:

$$\frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k.$$

Daher kann man das Integral-Restglied *nicht* zur Berechnung des exakten Fehlers zwischen $f(x)$ und dem Taylor-Polynom $T_n(x)$ benutzen. Zur Abschätzung des Fehlers ist es aber dennoch geeignet, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 12.59. $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1, \infty)$ und $x_0 = 0$:

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad k \geq 1$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + \frac{1}{n!} \int_0^x (-1)^n n! \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$$

Das Integral-Restglied kann nun z.B. für $x > 0$ wie folgt abgeschätzt werden:

$$\left| \int_0^x (-1)^n \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt \right| \leq \int_0^x (x-t)^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Die gleiche Abschätzung gilt auch für das Lagrange-Restglied:

$$|R_n(x,0)| = \left| \frac{n! x^{n+1}}{(n+1)!(1+\xi)^{n+1}} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x > 0.$$

Ableitungsregeln

Die elementaren Funktionen und ihre Ableitungen		
f	f'	Bemerkungen
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}$, Def.bereich abh. von α
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	
e^x	e^x	
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$x > 0$
a^x	$a^x \ln a$	$a^x := e^{x \ln a}, a > 0$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\log_a x := \frac{\ln x}{\ln a}, a > 0, a \neq 1, x > 0$
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\operatorname{arsinh}\ x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	
$\operatorname{arcosh}\ x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x > 1$

Allgemeine Ableitungsregeln		
$f(x) = c \cdot g(x)$	$f'(x) = c \cdot g'(x)$	Homogenität
$f(x) = u + v$	$f'(x) = u' + v'$	Additivität
$f(x) = u \cdot v$	$f'(x) = u'\,v + u\,v'$	Produktregel
$f(x) = \dfrac{u}{v}$	$f'(x) = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$	Quotientenregel
$f(x) = g(h(x))$	$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$	Kettenregel

Integrationsregeln

Grundintegrale			
$\int f(x)dx$	$=$	$F(x)+c, \quad c \in \mathbb{R}$	Bemerkungen
$\int x^n \, dx$	$=$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$n \neq -1$
$\int \frac{1}{x} \, dx$	$=$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$x \neq 0$
$\int \sin x \, dx$	$=$	$-\cos x + c$	
$\int \cos x \, dx$	$=$	$\sin x + c$	
$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$	$=$	$\tan x + c$	$x \neq (2k+1)\pi$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx$	$=$	$-\cot x + c$	$x \neq 2k\pi$
$\int \sinh x \, dx$	$=$	$\cosh x + c$	
$\int \cosh x \, dx$	$=$	$\sinh x + c$	
$\int e^{ax} \, dx$	$=$	$\frac{1}{a}e^{ax}+c$	$a \neq 0$
$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx$	$=$	$\arctan x + c$	
$\int \frac{1}{1-x^2} \, dx$	$=$	$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+c$	$\lvert x\rvert < 1$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$	$=$	$\arcsin x + c$	$\lvert x\rvert < 1$
$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$	$=$	$\ln(x+\sqrt{1+x^2})+c$	
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx$	$=$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert + c$	$\lvert x\rvert > 1$

Allgemeine Integrationsregeln

Linearität

$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int f(x)\,dx + \mu \int g(x)\,dx$$

Symmetrien

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad \text{falls } f(-x) = f(x)$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \qquad \text{falls } f(-x) = -f(x)$$

partielle Integration

$$\int u'v = u \cdot v - \int uv' \qquad \text{bzw.} \qquad \int_a^b u'v = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b uv'$$

Substitution

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \left(\int f(t)\,dt\right)_{t=\varphi(x)}$$

1. Substitution $\varphi(x) = t$ und $\varphi'(x)dx = dt$
2. Berechnung von $\int f(t)\,dt$
3. Resubstitution $t = \varphi(x)$

bzw.

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$$

Partialbrüche

Integration der Partialbrüche

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)}\,dx = A \cdot \ln|x-\alpha| + c$$

$k \geq 2$:

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}\,dx = -\frac{A}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}} + c$$

$$\int \frac{Cx+D}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = C \int \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx + (D+C\alpha) \int \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx$$

wobei

$$\int \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln((x-\alpha)^2+\beta^2) + c$$

und

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \frac{1}{\beta}\arctan\frac{x-\alpha}{\beta} + c$$

$k \geq 2$:

$$\int \frac{Cx+D}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}\,dx = C \int \frac{x-\alpha}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}\,dx + (D+C\alpha) \int \frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}\,dx$$

wobei

$$\int \frac{x-\alpha}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}\,dx = -\frac{1}{2(k-1)} \cdot \frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{k-1}} + c$$

und

$$\int \frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}\,dx = \frac{1}{2(k-1)\beta^2} \cdot \frac{x-\alpha}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{(2k-2)\beta^2} \int \frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{k-1}}\,dx$$

Index

Ableitung
  k-te, 66
  höhere, 66
  linksseitige, 67
  rechtsseitige, 67
  zweite, 66
Ableitungsregeln
  allgemeine, 122
  elementarer Funktionen, 121
  Homogenität, 62
  Kettenregel, 65
  Produktregel, 63
  Quotientenregel, 63
  Summenregel, 62
  Umkehrfunktion, 65

Bilinearform, 2
  inneres Produkt, 2
  positiv definite, 2
  Skalarprodukt, 2
    Norm, 3
    normiert, 8
    orthogonal, 8
    Orthogonalsystem, 8
    Orthonormalsystem, 8
    sesquilineares, 3
  Standardskalarprodukt, 2
  symmetrische, 2

Cavalier'sches Prinzip, 115

Differentialquotient, 59
Differenzenquotient, 58
Dirichlet'sche Sprungfunktion, 38, 96
Dreiecksungleichung, 3

Eulersche Zahl, 29
Extremwert
  hinreichende Bedingung, 69
  notwendige Bedingung, 68

Fixpunkt, 78
  Kontraktionsfixpunktsatz, 79
  Näherungsverfahren, 79
Flächenfunktion, 101
Folge, 19
  Anfangsglied, 20
  arithmetische, 19
  beschränkte, 20
  bestimmt divergente, 21
  Cauchy-Folge, 22
  divergente, 21
  Fibonacci-Zahlen, 19
  Folgenglied, 20
  geometrische, 20
  Grenzwert, 20
  komplexe Zahlenfolge, 19
  konvergente, 20
  monoton fallende, 20
  monoton wachsende, 20
  reelle Zahlenfolge, 19
  Teilfolge, 23
  unbestimmt divergente, 21
Funktion
  k-mal stetig differenzierbare, 66
  (schwach) (monoton) fallende, 51
  (schwach) (monoton) wachsende, 51
  Änderungsrate, 58
  absolutes Minimum, 45
  Berührpunkt, 73
  beschränkte, 46
  Bildbereich, 37
  Cosinusfunktion, 37
  Definitionsbereich, 37
  differenzierbare, 59
  erste Ableitung, 59
  Exponentialfunktion, 37
  Extremwert, 45
  folgenstetige, 40
  gleichmäßig stetige, 44
  globales Maximum, 45

globales Minimum, 45
Hintereinanderausführung, 38
Komposition, 38
konstante, 37
lineare, 37
lineare Approximation, 58
lokales Maximum, 46
lokales Minimum, 46
Maximum, 45
Nullstelle, 47
Nullstellensatz, 47
Polynomfunktion, 37
rationale, 37
Partialbruchzerlegung, 89
reellwertige, 37
relatives Maximum, 46
relatives Minimum, 46
Riemann-integrierbare, 96
Satz vom Maximum, 46
Sinusfunktion, 37
stetig fortsetzbare, 44
stetige, 41
Tangente, 58
Treppenfunktion, 37
umgebungsstetige, 39
Umkehrfunktion, 52
unstetige, 43
Verknüpfung, 38
Wertebereich, 37
Zwischenwertsatz, 50

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 102

Integral
bestimmtes, 96
konvergentes, 105, 106
unbestimmtes, 85
uneigentliches, 105
Integration
der Partialbrüche, 125
durch Substitution, 88
numerische
Rechteckregel, 107
Stützstellen, 108
partielle, 87
Integrationsregeln
allgemeine, 124
Grundintegrale, 123

Lagrange'sches Restglied, 75
Lagrange-Interpolationspolynom, 108
Logarithmus
natürlicher, 54

Matrix
orthogonale, 14
Metrik, 6
metrische Abbildung, 14
Mittelwertsatz der Differentialrechnung
Erster, 70
Zweiter, 71
Mittelwertsatz der Integralrechnung
Erster, 101
Verallgemeinerter Erster, 100

Newton-Verfahren, 80
Fehlerabschätzung
a posteriori, 81
a-proiri, 82
Kontraktionsintervall, 82
Norm, 5
Manhattan-Norm, 5
Maximum-Norm, 5
Rechtecknorm, 5
Tchebychefnorm, 5
Nullmenge, 99

orthogonale Projektion, 10
Orthonormalisierungsverfahren, 9

Paralellogrammgleichung, 4
Praehilbertraum, 2

Quadraturformel, 108
Newton-Cotes, 108
Genauigkeitsgrad, 109
geschlossene, 110
Integrationsgewichte, 109
Simpson-Regel, 111
summierte Newton-Cotes Formeln, 112
summierte Simpson-Regel, 112
summierte Trapez-Regel, 112
Trapez-Regel, 111

Regeln von L'Hospital, 72
Reihe
n-te Partialsumme, 28
absolut konvergente, 32
alternierende, 31

Cauchy'sches Konvergenzkriterium, 29
Cauchy-Produkt, 35
konvergente, 28
Leibniz'sches Konvergenzkriterium, 31
Majorante, 32
Minorante, 32
Quotientenkriterium, 34
unendliche, 28
Vergleichskriterium, 32
Wurzelkriterium, 33
Riemann-Integral
oberes, 96
unteres, 96
Rotationskörper, 116

Satz von Bolzano-Weierstraß, 23
Satz von Rolle, 70
Stammfunktion, 85

Taylor-Entwicklung, 78
Taylor-Formel, 75
Integral-Restglied, 119
Taylor-Polynom, 75
Restglied, 75
Taylor-Reihe, 78

Ungleichung von Cauchy-Schwarz, 3

Zerlegung, 93
Obersumme, 93
Untersumme, 93
Verfeinerung, 94
Zerlegungsfolge, 97