PBZ (Partialbruchzerlegung)

Liegt ein Bruch von Polynomen vor mit Grad $P(x)$ > Grad $Q(x)$, kann Partialbruchzerlegung angewandt werden.

$$\left(f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{(m-1)} x^{(m-1)} + \cdots + b_1 x + b_0}\right)$$

Vier Fälle von PBZ:

1. $\frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m)} = \frac{6x^2-x+1}{x^3-x} = \frac{6x^2-x+1}{x(x+1)(x-1)} = \boxed{\frac{A}{x} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{x-1}}$, wobei $\boxed{A = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}}$, $\boxed{B_1 = \frac{P(\alpha_2)}{Q'(\alpha_2)}}$, $\boxed{B_2 = \frac{P(\alpha_2)}{Q'(\alpha_2)}}$, $\cdots$
2. $\frac{x+1}{x(x-1)^3} = \boxed{\frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_2}{(x-1)^3}}$
3. $\frac{3x^2-2}{(x+1)(x^2+x+1)} = \boxed{\frac{A}{x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}}$
4. $\frac{5x^2-4x+16}{(x-3)(x^2-x+1)^2} = \boxed{\frac{A}{x-3} + \frac{D_1 x+E}{(x^2-x+1)} + \frac{D_2 x+E}{(x^2-x+1)^2}}$

Häufig auftretende PBZs:

- $\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + \frac{C}{x+c}$ $\quad \begin{cases} A = \frac{1}{(b-a)(c-a)} \\ B = \frac{1}{(a-b)(c-b)} \\ C = \frac{1}{(a-c)(b-c)} \end{cases}$
- $\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + \frac{C}{x+c} + \frac{D}{x+d}$ $\quad \begin{cases} A = \frac{1}{(b-a)(c-a)(d-a)} \\ B = \frac{1}{(a-b)(c-b)(d-b)} \\ C = \frac{1}{(a-c)(b-c)(d-c)} \\ \vdots \end{cases}$
- $\frac{1}{(a+bx)(f+gx)} = \frac{1}{fb-ag}\left(\frac{b}{a+bx^2} - \frac{g}{f+gx}\right)$
- $\frac{1}{(a+bx^2)(f+gx^2)} = \frac{1}{fb-ag}\left(\frac{b}{a+bx^2} - \frac{g}{f+gx^2}\right)$

Differentiation

Partielle Differenzierbarkeit

Um in einem Punkt partielle Differenzierbarkeit zu Prüfen, genügt es die Existenz folgender Grenzwerte zu zeigen:

$$\boxed{f'_{x_1}(x_1,x_2) = lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(\epsilon,x_2)-f(x_1,x_2)}{\epsilon}}$$

$$\boxed{\text{AND}}$$

$$\boxed{f'_{x_2}(x_1,x_2) = lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x_1,\epsilon)-f(x_1,x_2)}{\epsilon}}$$

Dann ist $f(x_1,x_2)$ in $P(x_1,x_2)$ partiell differenzierbar.
Die totale Differenzierbarkeit zeigt man dann mit dem Schema in FS(schwarz) S. 129

Taylorentwicklung

- **Taylorreihe** (mit mehreren Veränderlichen):

$$T_{(x)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{d}{dx}\triangle x + \frac{d}{dy}\triangle y\right)^k \cdot f(x_0,y_0)$$

  $\triangle x = x - x_0$; $\triangle y = y - y_0$

  Beispiel: Geg: $f_{(x,y)} = \cos xy + xe^{y-1}$; Entwicklungspunkt: $x_0 = \begin{pmatrix}\pi\\1\end{pmatrix}$ Ges: Taylorpolynom 2. Grades

  - 1. Summand: $f_{(x_0,y_0)}$
    $T_0 = \cos\pi\cdot 1 + \pi\cdot e^{1-1} = \cos\pi + \pi = \underline{\pi - 1}$
  - 2. Summand:

$$\begin{array}{lll} f'_{(x,y)_x} = -y\sin xy + xe^{y-1} & \rightarrow & f'_{(x_0,y_0)_x} = 1 - \sin\pi + 1 = 1 \\ f'_{(x,y)_y} = -x\sin xy + xe^{y-1} & \rightarrow & f'_{(x_0,y_0)_y} = -\pi\sin\pi + \pi e^{1-1} = \pi \end{array}$$

    $T_1 = 1\triangle x + \pi\triangle y = (x-\pi) + \pi(x-1) = \underline{x - 2\pi + \pi x}$
  - 3. Summand:

$$\begin{array}{lll} f''_{(x,y)_{xx}} = -y^2\cos xy & \rightarrow & f''_{(x_0,y_0)_{xx}} = -1\cos\pi = \underline{1} \\ f''_{(x,y)_{yy}} = -x^2\cos xy + xe^{y-1} & \rightarrow & f''_{(x_0,y_0)_{yy}} = -\pi^2\cos\pi + \pi e^{1-1} = \underline{\pi^2+\pi} \\ f''_{(x,y)_{xy}} = -\sin xy - yx\cos xy + e^{y-1} & \rightarrow & f''_{(x_0,y_0)_{xy}} = -\sin\pi - \pi\cos\pi + e^{1-1} = \underline{\pi+1} \end{array}$$

    $T_2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d}{dx}\triangle x\right)^{(2)} + 2\frac{d}{dx}\triangle x\frac{d}{dy}\triangle y + \left(\frac{d}{dy}\triangle y\right)^{(2)}\right]\cdot f_{(x_0,y_0)}$

$$\begin{array}{ll} T_{(x,y)} = & \frac{1}{2}(x-\pi)^2 + (1+\pi)(x-\pi)(y-1) + \frac{1}{2}(1+\pi)(y-1)^2 + \\ & +x - 2\pi + x\pi + \\ & +\pi - 1 \end{array}$$

- **Taylorentwicklung**:(n-ten Grades)
  Das Taylorpolynom n-ter Ordnung im Entwicklungspunkt a ist:

$$T_{n(f,a+h)} = f(a) + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\cdot f^{(i)}(a)\cdot(x-a)^i$$

  (FS schwarz, S. 75)

Freie Extrema : unabhängige Nullstellen

Geg: $f_{(x,y)} = 3x^2 - 4xy$; $k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$

- $\nabla f = \begin{pmatrix} -4y \\ 6y - 4x \end{pmatrix}$
  $\Rightarrow y = 0,\ x = 0$
  $\Rightarrow$ Es gibt eine Extremalstelle bei $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Lagrange: $L = f + \lambda g$; $g \widehat{=}$ Nebenbedingung
  $\rightarrow L = 3y^2 - 4xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$
  I) $L'_x = -4y + 2\lambda x \overset{!}{=} 0$
  II) $L'_y = 6y - 4x + 2\lambda y \overset{!}{=} 0$
  III) $L'_\lambda = x^2 + y^2 - 1 \overset{!}{=} 0$
  $\Rightarrow \lambda_1 = -4;\ \lambda_2 = 1$
- $\rightarrow \lambda = -4$:
  $\hookrightarrow y = \frac{1}{2}(-4)x = -2x \rightarrow$ in III) $\Rightarrow y = \underline{2\sqrt{\frac{1}{5}}}$
- $\rightarrow \lambda = 1$:
  $\hookrightarrow y = \frac{1}{2}x$ in III)
  $\Rightarrow y = \underline{\sqrt{\frac{1}{5}}}$

Extrema mit Nebenbedingungen

Bestimme die Extrema von

$$f_{(x,y)} = x^4 - 2x^2 + (2x^2 - 1)y^2$$

unter der Nebenbedinung $4x^2 + y^2 = 20$
Lösung:

- 1. Ableitungen:
  $f'_x = 4x^3 - 4x + 4xy^2$
  $f'_y = 4x^2y - 2y$
  $f''_{xx} = 12x^2 + 4y^2 - 4$
  $f''_{xy} = 8xy$
  $f''_{yy} = 4x^2 - 2$
- 2. Hessematrix:
  $H = \begin{pmatrix} 12x^2 + 4y^2 - 4 & 8xy \\ 8xy & 4x^2 - 2 \end{pmatrix}$
- 3. Nullstellen der Ableitungen: (Male Graphen)
- 4. Einsetzen der Punkte in Hessematrix:
  $H_{P_1} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{8}}$ $H_{P_2} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{16}}$
  $H_{P_3} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{16}}$ $H_{P_4} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{-8}}$
  $H_{P_5} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{-32}}$ $H_{P_6} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{8}}$
  $H_{P_1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{-8}}$

Stetigkeit und Konvergenz

- Stetigkeit

  Überprüfe die Stetigkeit von

$$f_{(x,y)} = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \forall x, y \neq 0 \\ 0 & \text{f.} x, y = 0 \end{cases}$$

  Lösung:

  - $\rightarrow$ Folgenkriterium: für $x = \frac{1}{n^2}, y = \frac{1}{n}$ setzen mit $n \rightarrow \infty$
  - $\Rightarrow \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{2}{n^4}} = \frac{1}{2} \quad \neq 0 \quad \Rightarrow$ nicht stetig!

- Konvergenz

  Konvergiert die Folge:

$$\overrightarrow{x_n} = \left(e^{-n}, \frac{n^2}{1+n^2} \right)$$

  Lösung:

  - Jeder Teil des Vektors muss konvergieren. (sonst nicht konvergent)
  - $\lim_{n\rightarrow\infty} e^{-n} = \underline{0}$
  - $\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{n^2}{1+n^2} = \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n^2}+1} = \underline{1}$
  - $\Rightarrow \lim_{n\rightarrow\infty} \overrightarrow{x_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

    $\Rightarrow$ konvergiert nicht!

Integration

Cauchy-Hauptwert

Idee: Integral an Polstellen teilen.

$\int_a^b f(x)dx = lim_{\epsilon \to +0} \quad \left[\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x)dx\right]$

Zunächst die Integrale lösen, dann den Grenzwert ermitteln.

Oberflächenintegrale im $\mathbb{R}^3$

Im $\mathbb{R}^2$ lasse z weg und ersetze das Kreuzprodukt durch die $\|detJ_G\|$.

Anweisung:	Beispiel:
Vorraussetzung: nur zwei Variablen nötig; überschüssige durch gegebene ausdrücken	$S := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \| z \leq 2; z = 1 + \sqrt{x^2+y^2}\right\}$ Berechne $\int_S x^2 + y^2 + z^2 dS$
Ersetzen von (x,y) durch Polarkoordinaten $(\rightarrow cos^2(x) + sin^2(x) = 1)$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rcos\varphi \\ rsin\varphi \\ 1+r \end{pmatrix} = s(r,\varphi)$ $(\Rightarrow \quad z = 1 + \sqrt{x^2+y^2} = 1 + \sqrt{r^2(cos^2\varphi + sin^2\varphi)} = 1 + r)$
Ersatz für die Funktionaldeterminante berechnen: $J = \|s'_r \times s'_\varphi\|$ $\hookrightarrow \int\int_S f dS = \int\int_S J \; dudv$	$J = \left\| \begin{pmatrix} cos\varphi \\ sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -rsin\varphi \\ rcos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -rcos\varphi \\ rsin\varphi \\ r \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}r$ $\int\int_S f dS = \int\int_S \sqrt{2}r \cdot f \; dr d\varphi = \int_S \sqrt{2}r(x^2+y^2+z^2)\, d\varphi dr = \int\int \sqrt{2}r(r^2+z^2)\, d\varphi dr$
Integrationsgrenzen abstecken: φ: meist $\in [0; 2\pi]$ oder $\in [-\pi; \pi]$	$z = 1 + r \leq 2 \rightarrow \boxed{0 \leq r \leq 1}$ $\boxed{-\pi \leq \varphi \leq \pi}$
$\int\int_S f dS$ berechnen	$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2}r(r^2 + z^2)\; d\varphi dr = \sqrt{2}\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} 2r^3 + 2r^2 + r \; d\varphi dr = 2\pi\sqrt{2}\left(2\int_0^1 r^3 dr + 2\int_0^1 r^2 dr + \int_0^1 r dr\right) = \underline{\underline{\sqrt{2}\frac{10}{3}\pi}}$

Volumenintegrale

Anweisung:	Beispiel:
Vorraussetzung: drei Variablen (s. Oberflächenintegrale). Zwei Ungleichheitszeichen	$B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 < z < 1\}$ $\int_B \sqrt{x^2+y^2} d(x,y,z)$
Koordinaten umwandeln. Z.B. Zylinder-, Kugelkoordinaten	Hier: Zylinderkoordinaten: $x = rcos\varphi$ $y = rsin\varphi$ $z = z$ $B = \{(rcos\varphi, rsin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r^2 < z < 1\}$; $\int_B \sqrt{x^2+y^2} d(x,y,z) = \int_B r d(x,y,z)$
Funktionaldeterminante: $J_G = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$ $\int\int\int_V f dV; \quad dV = \lvert J_G \rvert dudvdw$	$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varphi,z,r)} = \begin{vmatrix} -rsin\varphi & 0 & cos\varphi \\ rcos\varphi & 0 & sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = r$ $\int\int\int_V f dV = \int\int\int_V r dV = \int\int\int_V r \cdot r \; d\varphi dz dr$
Eingrenzen der neuen Variablen	$1 \geq r \geq 0$ $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ $r^2 \leq z \leq 1$
Aufstellen des Integrals. !Integrieren erst nach variablen Grenzen, so, dass demnächst benötigte Integrationsvariablen als Grenzen auftreten. Beachte, dass das äussere Integral stets feste Grenzen hat!	$\int\int\int_V r \cdot r \; d\varphi dz dr =$ $\int_0^1 \int_{r^2}^1 \int_{-\pi}^{\pi} r^2 \; d\varphi dz dr = 2\pi \cdot \int_0^1 \int_{r^2}^1 r^2 \; dz dr =$ $2\pi \int_0^1 r^2(1-r^2) \; dr = 2\pi \int_0^1 r^2 - r^4 \; dr =$ $2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \underline{\underline{\frac{4}{15}\pi}}$